Die Typen der linearen Complexe elliptischer Curven im R_r.

Von S. Kantor.

An einer ansehnlichen Zahl von Problemen und Theorieen der Geometrie und Functionentheorie erkannte man in den letzten Jahren, dass ihren Kern die Systeme rationaler und elliptischer Curven bilden und in den meisten Fällen führte dazu das Princip der Verminderung der adjungirten Functionen. Den Anfang machte, wie wohl nicht zu bezweifeln ist, meine Theorie der periodischen Transformationen (Neapel, 1884–1889 und Cr. J., Bd. CXIV), sofern man nicht das Schwarz'sche Theorem mit seinen Beweisen von Schwarz, Hettner, Nöther, Picard, Painlevé vorausstellen will. Dann kam Herrn Picard's übrigens durchaus selbständige Preisschrift, hierauf Castelnuovo's Anwendungen meines Principes der Verminderung der ϕ* auf die Curvensysteme auf Flächen (Math. Ann., Bd. XLIV, Società italiana, 1896, Accademia R. dei Lincei), das sich weiterhin auch F. Enriques angeeignet hat (Società italiana, 1896, und Math. Ann., Bd. XLIX). Im Jahre 1895 folgte meine (schon 1885 vollendete) Theorie der Transformationsgruppen in der Ebene (Berlin, Meyer u. Müller, 1895) und weiterhin kamen meine neuen Aequivalenztheorieen in den Monatsheften, 1899, nebst der Anwendung auf die rationale Zerlegung der birationalen Transformationen in der Ebene in Primfactoren. Auch das Gruppenproblem in R_3 und R_r, das nun an die Reihe kam, wird wie von zwei Säulen von zwei Theorieen gestützt, von denen die eine—über die Typen rationaler Curven—bereits veröffentlicht ist,† die zweite den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet.

Die Methode dieser zweiten Arbeit ist von jener der ersten äusserlich verschieden, wenn auch im allerletzten Grunde ihr verwandt und ist aber auch unabhängig von allen wie immergearteten Vorarbeiten Anderer, und beruht einzig und allein auf den Principien, die ich in meinen Arbeiten in den Monatsheften für

* Ich weise auf seine ausdrückliche Feststellung meiner Priorität hin, die er in den Math. Ann., Bd. XLIV, p. 125-155 macht.

† American Journ. of Mathematics, vol. XXIII.

Math. und Physik, 1899,* eingeführt habe und auf einer Weiterentwickelung derselben. Aus diesem Grunde wird es wohl angebracht sein, wenn ich über die Entstehung jener beiden Arbeiten hier unter dem Texte einige chronologische Feststellungen mache.†

Für die allgemeinen Begriffe und Definitionen, die sich auf Curvencomplexe im R_r beziehen, kann ich auf meine Abhandlung verweisen, die im XXIII Bande dieses Journals abgedruckt ist.

§1.—*Ueber eine Classe von Hilfssätzen über ebene Curvensysteme.*

Sind einmal die Typentheoreme für rational distinct gegebene Systeme von

---

* "Neue Äquivalenztheorie für die linearen Systeme rationaler, elliptischer und hyperelliptischer Curven in der Ebene." "Rationale Decomposition der birationalen Transformationen in ihre Primfactoren."

‡ Die erste Idee entstand mir im Winter 1895 aus der Untersuchung jener Transformationen und Gruppen von Transformationen des R_r, welche ein System von R_i in sich transformiren, und daher i. a. eine Gruppe von Transformationen erzeugen. Es galt zu finden, wie weit man die Decomposition treiben könne. Hierzu erweisen sich Theoreme für die Erniedrigung der Ordnung einer solchen birationalen Transformation nothwendig, deren Fundamentalpunkte nicht sämmtlich rational gegeben sind und ich sah sofort, dass das Theorem von Nöther aus dem V. Bande der Math. Ann. durch ein complicirteres ersetzt werden müsse. Von hieraus entwickelten sich dann allmälig die weiteren Anschauungen über die rational gegebenen oder rational bestimmbaren linearen Curvensysteme (und, wie bei meiner damaligen Beschäftigung mit der r-dimensionalen Geometrie selbstverständlich war, auch über rational distinct bestimmbare M_{r-1}-Systeme im R_r), die ich in den genannten zwei Arbeiten niedergelegt habe. Im Winter 1896 stellte ich jene Bemerkung über die Nothwendigkeit eines mehr gegliederten Decompositionstheoremes und eine andere Entdeckung, die ich bis zur Stunde noch nicht veröffentlicht habe, in einer kurzen Note zusammen, von welcher 4 Mathematiker (die Herren Thomas Craig (†), Ferdinand Lindemann, Heinrich Weber, Giuseppe Jung) theils im December 1896, theils im Februar und März 1897 Abschriften in Händen hatten (und in einem Falle noch haben).

Im Laufe der Monate März und April 1897 gelang es mir dann, die von mir noch vermissten Beweise, die sich nun in den Monatsheften von 1899 publicirt finden und die absolut original sind, hinzuzufinden. Das Heft des 49. Bandes der Math. Ann., das eine Arbeit von Enriques enthält, die ebenfalls mit dem Irrationalen in der Geometrie sich beschäftigt und absichtlich einen prononcirt algebraischen Ursprung und Zweck hervorkehrt, lernte ich als privater Besucher der "Library of the National Observatory" in Washington (Ca.) nicht vor Ende Mai 1897 kennen. Auf dem Annalenhefte befand sich übrigens die Notiz: "Ausgegeben am 23. April, 1897." Um jene Zeit also waren meine Ideen über das Rationale in der Geometrie schon längst entwickelt und meine Beweise—übrigens für Gegenstände, auf welche die Enriques'sche Arbeit *gar keinen Bezug* hat—beinahe vollendet. Soviel über "*das Rationale in der Geometrie.*" Cf. meine Fussnote hier unten in §5.

Das Problem der vorliegenden Arbeit nun aber war bereits behandelt und zu einem Schlusstheorem, wenn auch einem sehr wenig detaillirten, fortgeführt in einer allerdings nur provisorischen, unvollkommenen und flüchtig gearbeiteten Skizze, die im December 1896 einem Mathematiker (Thomas Craig †) vorgelegen hat: "Abriss einer Theorie der endlichen Gruppen eindeutiger Transformationen im R_3", gleichwie die nunmehr bereits publicirte Lösung des Problemes über die Complexe rationaler Curven im R_3.

Curven $p = 1$ gegenüber rational distincten Transpositionen gegeben, so verbleibt noch die Nothwendigkeit, die gefundenen typischen Systeme *durch ihre sämmtlichen Transversalzahlen* einzeln zu characterisiren. Die gleiche Zusammenstellung wäre dann jedesmal erforderlich, wenn die Systeme elliptischer Curven auf zwei rational distinct gegebenen M_2 hinsichtlich ihrer Aequivalenz untersucht werden sollen.

Die auf die sämmtlichen typischen ebenen Systeme elliptischer Curven bezüglichen Theoreme hier vorzuführen, würde zu viel Raum erfordern; ich will als Vertreter nur einen Fall hervorheben, wobei ich gleich auf der M_2 handle:

"Ein lineares ∞^8-System elliptischer Curven C_n, das auf einer rational distinct abbildbaren M_2 rational gegeben ist, kann von einer der drei folgenden Arten sein:

"1. Art. Es besitzt eine rational distincte Transversalcurve einpunktigen Schnittes, ein rational distinctes lineares ∞^2-System rationaler dreipunktig schneidender Transversalcurven, das vom Range 4 ist und ein rational distinctes lineares ∞^1-System zweipunktiger Transversalcurven der C_n enthält. Es besitzt kein rational distinctes lineares ∞^3-System von Transversalcurven, welches auch die Transversalzahl s wäre, und kein rational distinctes ∞^7- oder ∞^8-System, wohl aber ein rational distinctes lineares System (Rang 5), welche $s = 7$ gegen die C_3 hat.

"2. Art. Es besitzt zwei rational distincte lineare ∞^1-Systeme von rationalen Transversalcurven mit $s = 2$, ein rational distinctes lineares ∞^3-System rationaler Transversalcurven (Rang 2) mit $s = 4$. Es besitzt zwei rational distincte lineare ∞^8-Systeme 1. Art. von Curven $p = 1$ mit $s = 10$, welche ein rational distinctes ∞^7-System mit $s = 8$ gemeinsam haben, welches letztere auch Bestandtheil des gegebenen Systemes ist.

"3. Art. Es besitzt ein rational distinctes (aber irrational gebundenes) Paar von ∞^1-Systemen rationaler Transversalcurven mit $s = 2$ gegen C_n, ein rational distinctes lineares ∞^3-System rationaler Transversalcurven mit $s = 4$, ein rationales Paar von ∞^8-Systemen 1. Art. von Curven $p = 1$ mit $s = 10$, und ihnen gemeinsam ein rational distinctes lineares System ∞^7 mit $s = 8$, welches Bestandtheil des gegebenen Systemes ist."

Aehnliche Theoreme gibt es für die ∞^9, ∞^7, ..., ∞^1 systeme. Aus diesen entnimmt man nun die folgenden Theoreme, die ich anführen will.

THEOREM I.—*Auf rational distinct auf eine Ebene abbildbaren M_2 kann es nur folgende von einander verschiedenen linearen Systeme elliptischer Curven geben,*

welche nicht rational distinct in einem höher dimensionalen linearen Systeme elliptischer Curven enthalten sind:

1. *das ∞^9-System,* 2. *das ∞^8-System der* 2. *Art,* 3. *das ∞^8-System* 3. *Art,* 4. *ein ∞^6-System,* 5. *ein ∞^5-System. Aus jedem anderen linearen in einer rational distinct abbildbaren M_2 rational distinct gegebenen Systeme von Curven $p = 1$ lässt sich, wenn auch nicht immer auf rational distincte Art, ein lineares Stammsystem einer der obengenannten* 5 *Arten ableiten, in dem es enthalten ist.*

THEOREM II.—*Diejenigen Untersysteme elliptischer Curven von jenen aus Theorem I., die nicht in einem rational distinct aus ihnen ableitbaren Stammsysteme des Theoremes I. enthalten sind, sind:*

1. *das ∞^6-System, das zum Typus die C_3 mit drei irrational verbundenen Punkten hat, so lange als diese drei Punkte nicht alineirt sind,*

2. *das ∞^3-System, das zum Typus die C_3 mit zwei rationalen Tripeln hat, so lange keines derselben alineirt ist, oder*

3. *das ∞^3-System mit rationalem Sextupel, das nicht in einer C_2 enthalten ist,*

4. *das ∞^3-System mit drei Punktepaaren, deren Verbindungslinien nicht alineirt sind und die nicht in einer C_2 enthalten sind.*

Von diesen Theoremen werden wir im §4 dieser Arbeit Gebrauch machen.*

§2.—*Ueber einige in dieser Arbeit häufig angewandte Methoden.*

Wir beschäftigen uns in den folgenden §§ mit der Untersuchung der innerhalb eines M_{r-1}-Systemes oder durch mehrere M_{r-1}-Systeme erzeugten Curvensysteme und Complexe. Dazu dienen uns die gleichzeitig erzeugten M_2-Complexe. Gerade in der in diesem § gegebenen Zusammenstellung wird man den Grundcharacter unserer Untersuchung hervortreten sehen: wir steigen nicht in den R_4 oder R_r auf, um den R_{r-1} zu beleuchten, sondern, um die complicirteren Verhältnisse im R_r zu erforschen, steigen wir herab in die uns von früher her bekannten niederen Räume und aber bis zum zweidimensionalen Gebiete. Wir könnten sogar bei Anwendung von Vorsicht bis in das eindimensionale Gebiet hinabgehen.

---

*Eine Bemerkung mag hier am Platze sein. Man muss überhaupt die Typen der linearen Curvensysteme noch weiter dadurch in Unterfälle zerlegen, dass man z. B. bei C_3 drei Basispunkte in einer Graden oder 6 in einem Kegelschnitte voraussetzt, ebenso bei C_4 etwa 4 in einer Graden u. s. w. So können sogar unter den Basispunkten ganze Configurationen entstehen und dadurch typische Systeme, welche ihrerseits nicht äquivalent sind und doch den gemeinsamen Character eines der Obertypen an sich haben. Ich muss aber zur Beruhigung des Lesers bemerken, dass von jenen specificirten Transversaltheoremen keine Anwendung gemacht wird. Sie sind nur zur Beleuchtung des Principes erwahnt.

1. Hat man auf einer allgemeinen M_2 des gleichzeitig mit dem M_1-Complexe erzeugten M_2-Complexes das erzeugte Curvensystem $C_m^{(2)}$ derartig, dass sich *rational distinct* aus ihm ein höher dimensionales System $C_{m'}^{(2)}$ herleiten lässt, so muss auch das erzeugende M_{r-1}-System resp. müssen die erzeugenden M_{r-1}-Systeme so beschaffen sein, dass sie ohne Aenderung des Geschlechtes p der erzeugten Curven C durch Weglassung von Gebilden der Basisconfiguration (Punkte, M_1, M_2, ...) oder Erniedrigung von deren Vielfachheiten für die M_{r-1} in ein höher dimensionales System verwandelt werden, so dass der gegebene Curvencomplex in einem höher dimensionalen von Curven gleichen Geschlechtes "enthalten" ist.

Hiebei aber wird in den einzelnen Fällen wohl zu beachten sein, dass es nicht als rational distinct angesehen werden kann, wenn zu dem beschriebenen Vorgange die Hinzunahme anderer nicht in allen M_2 des Complexes *gleichmässig* erscheinenden Raumgebilde nothwendig ist.

Kann aber ferner auf M_2 ohne Aenderung des Ranges k im Systeme der $C_m^{(2)}$ dessen Dimension erhöht werden, so muss dies auch beim M_{r-1}-Systeme möglich sein und kann auf M_2 gleichzeitig k und p bei Erhöhung der Dimension constant erhalten werden, so muss dies auch bei den M_{r-1} der Fall sein.

Ist ein linearer Curvencomplex in keinem höher dimensionalen von gleichem p oder k oder p und k enthalten, so kann das aus ihm auf eine der erzeugten M_2 entfallende Curvensystem in keinem höher dimensionalen von gleichem p oder k oder p und k enthalten sein.

2. Das gleiche Princip gilt für den Uebergang von einem höher dimensionalen zu einem niederdimensionalen Systeme.

3. Ist auf einer allgemeinen M_2 des in einem Curvencomplexe $\infty^{u>r-1}$ des R_r erzeugten M_2-Complexes das erzeugte Curvensystem $C_m^{(2)}$ derartig, dass es ein rational distinctes Transversalensystem der Dimension u mit der Transversirungszahl s besitzt und dieses den Rang k_s hat, so gibt es auch ein *rational distinctes*, also aus dem erzeugenden M_{r-1}-Systeme oder den erzeugenden M_{r-1}-Systemen auf *rational distincte* Art ableitbares M_{r-1}-System, welches 1. gegen die sämmtlichen Curven des erzeugten Complexes die Transversalzahl s, 2. für sich i. a. die Dimension ∞^u und nur in Ausnahmsfällen eine grössere Dimension besitzt und 3. dessen in ihm erzeugte Curven die gegebenen M_{r-1} in k_s Punkten treffen (gegen sie die Transversalzahl k_s haben).

4. Eine Methode zur Construction von linearen Complexen elliptischer Curven: a) Hat man eine rational distincte Abbildung einer M_{r-1} auf die Ebene L_{r-1} mit dem Abbildungssysteme K_{r-2} und kann man im L_{r-1} ein ∞^u-System P_u elliptischer Curven verzeichnen, sodass es ein Restsystem im Systeme $(K_{r-2})^r$ hat und dass diese Ergänzungen so gewählt werden können, dass auch das in $C_1 + P_u$ schneidende System von M_{r-1} lauter abbildbare M_{r-1} enthält, was, wenn u hinreichend gross, bei elliptischen P_u übrigens eine nothwendige Folge ist, und dass die C_1 auf diesen M_{r-1} dieselben Singularitäten wie auf der gegebenen M_{r-1} bewirken, so hat man ein diese M_{r-1} enthaltendes M_{r-1}-System, das einen Complex elliptischer Curven erzeugt.

In der Anwendung dieser Methode, namentlich wenn sie mit Princip No. 1 in Verbindung gesetzt wird, ist vorsichtig zu beachten, dass durch die Abbildung ein neues Moment in das System elliptischer Curven gebracht wird: *irrationale Constructionselemente.* Man darf also nicht daraus, dass nach vollzogener irrationaler Abbildung der Bildcomplex in einem höher dimensionalen Complexe (etwa sogar distinct) enthalten ist, sofort schliessen, dass auch der Originalcomplex in einem höher dimensionalen Complexe enthalten sein müsse. Man muss eben beachten, dass das, was ich in No. 1. bis 3. dieses § als "die allgemeine M_2" im Complexe bezeichnet habe, noch nicht durch die Abbildung allein bestimmt ist, sondern erst, wenn man ausserdem noch die gemeinsamen Elemente des M_2-Complexes bestimmt hat. Erst durch die Kenntniss dieser kann man auch auf der einzelnen M_2 den Character des Curvensystemes puncto Transversalen in Bezug auf den ganzen Complex bestimmen.

b). Im Falle, wo die M_{r-1} rational distinct auf einen L_{r-1} abbildbar ist, gilt: Nimmt man in der Methode a) für P_u zwei geometrisch äquivalente, also durch räumlich birationale Verwandtschaft unter einander übergehende Systeme, sofern man die beiden linearen Systeme so situirt, dass die Transversalzahlen des Curvensystemes im Complexe dieselben bleiben, so ist auch der eine durch die Construction entstehende Curvencomplex im R_r wirklich geometrisch äquivalent dem erzeugten Curvencomplexe bei der zweiten Annahme. Es muss aber jene Verwandtschaft im L_{r-1} auf rein rationalem Wege für jede M_2 des Systemes erreichbar sein.

Es kann sonst geschehen, dass, obzwar die beiden projicirten Complexe elliptischer Curven vollständig übereinstimmen, die beiden Curvencomplexe dennoch nicht äquivalent sind. Von diesen Erwägungen werden wir besonders in §4 Verwendung machen.

c). Im selben Falle wie b) gilt: Nimmt man in der Methode a) einen Complex P_u nur in verschiedenen Lagen gegen K_{r-2}, so erhält man durch die Construction zwei Complexe elliptischer Curven im R_r, welche wirklich geometrich birational unter einander übertragbar sind.

d). Mit derselben Beschränkung wie b) gilt: Man erhält durch die Methode aus a) räumlich birational verwandte Curvencomplexe, wenn man den Complex P_u im Abbildungsraume L_{r-1} ungeändert lässt, aber das Abbildungssystem K_{r-2} durch irgend ein anderes ersetzt, welches noch immer ein ∞^{u+1}-System in R_r liefert, und wenn aber überdies nicht nur in der Abbildung, sondern auch auf "der allgemeinen M_2 des Complexes" ein System genau derselben Art wie beim anderen entsteht.

5. Die Methode aus No. 4 mit den nothwendigen Cautelen bleibt in Giltigkeit, wenn es sich um die Construction von Curvencomplexen und deren birationaler Aequivalenz *innerhalb* einer abbildbaren M_{r-1} oder zweier geometrisch birational bezogenen abbildbaren M_{r-1} handelt, von welchen man eine rational distincte Abbildung auf einander besitzt. Hiebei aber darf die Aequivalenz *auf* den M_{r-1}, also durch Correspondenzen unter den Punkten der beiden M_{r-1} allein nicht mit der Aequivalenz *in* den umgebenden R_r verwechselt werden.

§3.—*Eine umfassende Classe uneigentlicher Complexe elliptischer Curven im R_3.*

Auf einer M_2 sei ein lineares ∞^u-System von Curven $p=1$ gegeben, $u \geqq 3$. Es gibt unter den ausschneidenden M_{r-1} solche, welche in einem willkürlichen Punkte P von M_2 berühren. Ist $u=3$, worauf sich zu beschränken genügt, so haben wir ∞^2 Curven mit Doppelpunkt. Diese sind rational, geben also, wenn man P längs einer dieser Curven selbst variiren lässt, sicher unter anderem auch ein rationales ∞^1-System rationalen Curven, demzufolge M_2 sofort nach einem Nötherschen Satze unicursal wird, ober aber zerfallen in zwei Bestandtheile, die sich in P kreuzen und nicht beide elliptisch sind, da die Summe zweier elliptischer Curven nur dann auch eine elliptische Curve ist, wenn jene einem (durch die Singularitäten bestimmten) Büschel von Curven $p=1$ angehören, was auch dann gilt, wenn die beiden Curven sich irgendwie im Raume befinden; von den Bestandtheilen ist also mindestens einer rational, sodass sich ∞^1 oder ∞^2 rationale Curven auf M_2 befinden, was im zweiten Falle die M_2 unicursal macht. Der erste Fall kann die ∞^1 Curven $p=0$ nur in einer Reihe vom Index 1 gesammelt haben. Denn würden durch P zwei Curven

gehen, so könnte man, da auch die zweiten Bestandtheile der Zerfallcurven eine Reihe bilden, mehr als eine Curve der ∞^3-Reihe construiren, welche in P einen Doppelpunkt hätten, somit lineare ∞^1-Reihen, welche M_2 als unicursal bedingen. Also.* *Jede M_2, auf der eine lineare ∞^3-Reihe elliptischer Curven ausgeschnitten werden kann, ist entweder unicursal oder enthält ein Büschel rationaler Curven vom Index* 1, *hat also das Geschlecht $p < 0$*† *und ist vom Typus der elliptischen Kegelfläche.*

Auf einer unicursalen M_2 kann kein lineares System elliptischer Curven eine Dimension > 9 haben, auf den Kegelflächen $p = -1$ kann die Dimension eines linearen Systemes elliptischer Curven unbeschränkt hoch sein.

Dass die M_2 2. Art vom Typus der Kegelflächen sind, sieht man daraus, dass man das ∞^3-System in ein System ebener Schnitte verwandeln kann und auf der neuen M_2 können dann die rationalen Bestandtheile, die oben gefunden wurden, nur Geraden sein.

Ist nun ein *lineares System vom M_2 der zweiten Art* vorhanden, so müssen diese Büschel sämmtlich in einem Complexe rationaler Curven enthalten sein, von dem durch jeden Punkt des R_r nur eine geht. Die M_2 eines solchen Systemes schneiden sich also in Curven, welche aus mehreren Curven dieses Complexes zusammengesetzt sind. Daher können die M_2 vom Typus der elliptischen Kegelflächen nicht zu eigentlichen Complexen Anlass geben und es gilt:

THEOREM III.—*Alle uneigentlichen Complexe elliptischer Curven im R_3, von denen ein erzeugendes M_2-System den Typus der elliptischen Kegelflächen besitzt, sind räumlich birational übertragbar in den Schnitt eines linearen Systemes elliptischer Kegeln mit einem irgendwie hoch dimensionalen Systeme von Monoiden.*

Denn auf elliptischen Kegeln werden die elliptischen Curven von Monoiden ausgeschnitten.

Anmerkung. Es ist selbstverständlich, dass in einer Abhandlung über *Complexe von elliptischen Curven* (und besonders von so *weiten Zielen wie diese*) die Mannigfaltigkeiten mit elliptischen Curven, also auch die M_2 mit Systemen solcher vorkommen *müssen.* Ich habe daher den eben vorhergegangenen Beweis für M_2 mit ∞^3-Systemen gegeben und will nun zeigen, wie sich *aus jenem Satze*

* Dass jede M_2, auf der ein lineares ∞^2-System elliptischer Curven vorhanden ist, unicursal oder vom Kegelflächentypus sein müsse, hat G. Castelnuovo zuerst bewiesen in Rend. Acc. Lincei 1894.

† Auch dieser Satz, den ich in den C. R. vom 12. November, 1900, bewiesen, nachdem ihn vorher Herr F. Enriques, 1899, in den Math. Annalen ausgesprochen und bewiesen hatte, war bereits in jenem "Abrisse" von 1896, den ich oben erwähnte, enthalten und der später von mir in den C. R. gegebene Beweis daselbst angedeutet.

der Castelnuovo'sche Satz über M_2 mit ∞^2-Systemen ableiten lasse, und das mittelst einer Entwickelung, die *nichts* von den bekannten Beweisen an sich hat:— Ist auf der M_2 ein ∞^2-System enthalten, so kann dieses, wenn es vollständig sein soll, keinen Rang > 2 haben. Denn da von den Schnittpunktegruppen auf den einzelnen Curven nur ein Punkt abhängig von den übrigen ist, so können nicht im Netze alle bis auf einen abhängig sein. Das Netz müsste also in einem auf der M_2 ausschneidbaren Systeme höherer Dimension enthalten sein, wo nur 1 Punkt abhängig ist und die Curven wieder elliptisch wären. Die M_2 mit ∞^2-Systeme vom Range 2 kann dann sofort auf eine M_2^n mit $(n-2)$-fachem Punkte O ein-eindeutig abgebildet werden. Welche diese M_2^n sind, wo die Ebenen durch O in elliptischen Curven schneiden, soll hier nicht erforscht werden, aber man weiss, dass das Netz durch die Uebergangscurve $p=3$, welche alle C_3 in Punktquadrupeln schneidet, vollkommen bestimmt ist, was die Vertheilung der Invarianten betrifft. Man kann also zu jedem Netze auf einer M_2 eine Curve $C_4\,p=3$ in einer Ebene construiren, welche, wenn sie auf jene Uebergangscurve in $M_2\,(1-1)$ deutig bezogen ist, auch dieselbe Vertheilung der absoluten Invarianten unter den C_3 des Netzes in der Ebene bewirkt, wie unter den elliptischen Curven auf M_2 und es also ermöglicht, dass unter je zwei durch jene Beziehung einander zugewiesenen elliptischen Curven eine (1, 1)-deutige Beziehung hergestellt werden könne, sodass diese insgesammt eine (1, 1)-deutige Beziehung unter der M_2 und der Ebene liefern.

Hieraus schliessen wir auch: *Ist auf einer M_2 ein lineares ∞^2-System elliptischer Curven vorhanden, so ist dieses in einem ∞^3-System (eventuell nicht rational distinct) enthalten und M_2 ist (1, 1)-deutig auf eine Ebene abbildbar oder vom Typus der elliptischen Kegelflächen.*

§4.—*Die eigentlichen linearen Complexe elliptischer Curven der I. Classe im R_3.*

1. Die Natur des Complexes hängt offenbar von der Natur des linearen Systemes ab, das aus dem Curvencomplexe auf eine im Complexe erzeugte M_2 entfällt. Wir werden sehen, dass nach der Art dieser Systeme die Complexe in Classen einzutheilen sind und wollen diese System kurz die zweifach ausgedehnten Systeme im Complexe nennen.

In die I. Classe sollen nun jene Complexe gerechnet werden, wo die M_2 rational distinct auf eine Ebene abbildbar ist, nämlich so wie sie allgemein im Complexe erscheint. In diesem § sollen alle Complexe dieser Art erledigt werden. Vor allem gilt der ganz evidente Satz:

"*Soll die allgemeine M_2 des Complexes rational distinct auf die Ebene abbildbar sein, so muss es auf der M_2 stets ein rational distinguirbares System ∞^2 Ranges 1 rationaler Curven geben.*" Denn in der rational gegebenen Ebene, in die die M_2 distinct verwandelbar sein soll, gibt es stets ein unbedingt rational distinctes vollständiges ∞^2-System rationaler Curven, nämlich das Geradensystem.

2. Es sei nun im R_3 ein ∞^u-System von M_2 gegeben, das einen Complex von $C_n\, p=1$ erzeuge und die M_2 seien von der besprochenen Art. In jeder M_2 entsteht dann ein ∞^{u-1}-System, dessen Natur nun mit der irgend eines der in der Ebene möglichen Typen elliptischer Curvensysteme übereinstimmen muss. Von diesen Typen ist zu Beginn des §1 die Rede gewesen. Jedoch können nicht einmal alle jene Typen hier entstehen, weil das auf der M_2 vorhandene rational distincte ∞^2-System von Curven $p=0$ auch rational distinct für das lineare System elliptischer Curven sein muss, womit aber nicht gesagt ist, dass es sich aus diesem müsse auf rational distincte Art herleiten lassen.

Nach No. 1 des §2 schliessen wir nun, dass für das System von M_2 ein lineares System von Transversal-M_2^1 existiren muss, welches jene M_2 in jenem betrachteten rational distincten ∞^2-Systeme $p=0$ schneidet. Diese M_2^1 werden sich gegenseitig in Curven Γ schneiden, die gegen die M_2 des gegebenen ∞^u-Systemes die Transversalzahl besitzen und welche also, da die M_2 ∞^u sein sollen, es also ein ∞^u-System gibt, welches die einzelnen Punkte der Γ ausschneidet, rational sein müssen. Wir haben jetzt ein vollständiges ∞^2-System von M_2^1 mit rationalen Schnittcurven, woraus nebenher nach dem bekannten Satze Nöther's folgt, dass die M_2^1 auch unicursal sind. Wesentlich ist aber: im Besitze eines linearen ∞^2-Complexes rationaler Curven zu sein. Beziehen wir diesen Complex auf die ∞^2-Strahlen eines Bündels und dann überdies ein Büschel von M_2 des gegebenen Systemes auf ein Büschel von Ebenen, so erhalten wir die Möglichkeit, eine birationale Transformation einzurichten, welche jenen ∞^2-Complex in ein Strahlbündel, also die M_2^1 in ein Ebenenbündel und die M_2 in ein monoidales ∞^u-System verwandelt. Also:

THEOREM IV.—*Jedes ∞^u-System der I. Classe ist räumlich birational äquivalent einem ∞^u-Systeme von Monoiden mit gemeinsamem Scheitel $M_2^n\,(O^{n-1})$.*

3. Wir können im gegenwärtigen Falle das Princip No. 4, b) aus §2 einfach beweisen, indem wir für zwei gegebene Monoidsysteme die Schnittcurven auf je einem Monoide von O_1, O_2 aus herabprojiciren, so zwei ∞^{u-1}-Curvensysteme erhalten, welche birational äquivalent sind, zwei in dieser Aequivalenz A ent-

sprechende Curven benützen, hiezu zwei Büschel von Monoiden construiren und eine Raumtransformation mittelst A (unter den Strahlbündeln) und einer Projectivität auf entsprechenden Strahlenpaaren einrichten, und überzeugen uns, dass:

Zwei ∞^u-Systeme von Monoiden $M_2^{n_1}(O_1^{n_1-1})$, $M_2^{n_2}(O_2^{n_2-1})$ mit elliptischen Schnittcurvecomplexen birational äquivalent sind, wenn nicht nur die auf je einem Monoide enstehenden Curvensysteme von O_1, O_2 aus in zwei Systeme der gleichen Typus aus §1 projicirt werden, sondern überdies die Rationalitätsverhältnisse der M_2 innerhalb des Complexes dieselben bleiben.

4. Unser Problem hat nunmehr folgende Form zu bekommen: Wir müssen die Typen des §1 einzeln durchgehen, indem wir sie als Projection eines in einem Monoide $M_2^n(O^{n-1})$ enthaltenen Systemes ansehen, auf dem es aber durch ein lineares System von Monoiden derselben Ordnung ausgeschnitten wird und müssen, indem wir von den niedersten Werthen des n beginnen, zu erforschen suchen, welche irrational distinguirte Systeme auf $M_2^n(O^{n-1})$ flächen wir mit demselben §1-Typus erreichen können. Dies soll nun geschehen.

C_3-*Typus* $(A_1, \ldots.)$.

5. $M_2^2(O)$. Sie sollen durch die Abbildung untersucht werden, welche den ebenen Schnitten die C_2 durch zwei feste Punkte O_1, O_2, die man als ein irrational verknüpftes Paar ansehen muss, entsprechen machen. C_3 als Bilder von Schnitten solcher M_2^2, welche O enthalten (damit sie in diesen § gehören), können nur insofern erreicht werden, als sie durch O_1O_2 gehen. Wir haben also hier als Bild ein ∞^7-System, welches nicht in einem ∞^9-Systeme, sondern nur in einem ∞^8-Systeme (als Zerfällungsproduct) enthalten ist, wenigstens mit Beachtung dessen, dass $M_2(O)$ in einem linearen Systeme enthalten sein soll. Für uns soll der so entstehende Complex der Schnittcurven aller ∞^8-$M_2^2(O)$ als Typus gelten. Wir erhalten aus ihm andere ∞^u-Systeme, $u < 0$, wenn wir weitere einfache Punkte als gemeinsam voraussetzen, $A_2, \ldots., A_7$, wo aber die Verknüpfungen wie $\overbrace{A_2A_3}$, $\overbrace{A_2A_3A_4}$, $\overbrace{A_2A_3A_4A_5}$, $\overbrace{A_2A_3A_4A_5A_6}$, $\overbrace{A_2 \ldots. A_7}$* zu beachten sind und mit rational gegebenen Punkten in allen dort angegebenen Arten zu combiniren sind.

*** Das Zeichen ⏜ meint, dass die darunter zusammengefassten Punkte irrational sind, aber insgesammt eine rationale Gruppe bilden.**

6. $M_2^3(O^2)$. Die Abbildung der ebenen Schnitte wird durch C_3 durch 6 Punkte $O_1, \ldots, O_6$ geliefert, die in einem Kegelschnitte Ω_2 sind. Aller $M_2^3(O^2)$ gegenseitige Schnitte haben als Bilder C_5 und die auf der einen $M_2^3(O^2)$ die $C_5(O_1, \ldots, O_6)$. Hier kann also ein ∞^9-System C_3 erscheinen, das aber durch Ω_2 zu ergänzen ist. Also haben wir als zweiten Typus den Complex der Schnittcurven aller $M_2^3(O^2)$ mit festem Osculationskegel in O. Da die C_3 keine Basispunkte gemeinsam haben, so kann sich in den Transversalzahlen nichts ändern, wenn wir nach § 2, No. 4, eine andere Abbildung nehmen und wir können sofort diesen Typus als den einzigen der ∞^{10}-M_2-Systeme erklären.

Beim ∞^8-Systeme mit 1 Punkte A_1 können wir A_1 willkürlich in der Ebene nehmen oder mit O_1 coincidiren lassen, das heisst aus dem vorigen M_2^3-Systeme eines durch Festlegung eines Punktes ausscheiden, und diesen aber entweder willkürlich im Raume oder auf einer Erzeugenden des osculirenden Kegels wählen. Die beiden so entstehenden Systeme sind äquivalent. Wir sehen, dass in beiden Fällen der Ergänzungskegelschnitt C_2 mit Ω_2 coincidiren muss.

Beim ∞^7-System mit 2 Punkten A_1, A_2 gilt derselbe Schluss wie vorhin, nämlich dass bei gleicher Wahl von C_2, nämlich $\equiv \Omega_2$, die Verlegung von A_1, A_2 frei in die Ebene oder in O_1, O_2 keine birational verschiedenen Systeme liefert. Bei der zweiten Wahl sind wir *nicht gezwungen*, $C_2 \equiv \Omega_2$ *zu nehmen*, sondern können C_2 frei durch $O_3\, O_4\, O_5\, O_6$ wählen. Dann entsteht ein von den beiden anderen nicht verschiedenes System $M_2^3(O^2)$, welches einen festen Kegelschnitt Q besitzt, der O nicht enthält. Eine quadratische Transf. $M_2^2(OQ)$ führt aber dieses System sofort auf $M_2^2(O)$, den 1. Typus.

Wir haben in dem hier erhaltenen ∞^8-System von $M_2^3(O^2)$ mit zwei Geraden $g_1 g_2$ durch O und festen Osculationskegel in O einen Beleg für die in No. 4 des § 2 angerathene Vorsicht. Das C_3-System mit festem Punktepaare als Bild liefert bei $M_2^2(O)$ und bei $M_2^3(O^2)$ zwei ganz verschiedene Complexe.

Beim ∞^6-System von C_3 mit $A_1 A_2 A_3$ können wir die $A_1 A_2 A_3$ frei oder theilweise oder ganz in O_1, O_2, O_3 wählen. Ein System, das nicht aus den bisherigen durch Festlegung eines weiteren gemeinsamen Punktes, der ohne Unterscheidung auch auf einer Erzeugenden des Osculationskegels gewählt werden kann, hervorgeht, entsteht durch $A_i \equiv O_i$ $(i = 1, 2, 3)$ und wenn man den Ergänzungskegelschnitt frei durch $O_4\, O_5\, O_6$ legt. Dies liefert $M_2^3(O^2)$ durch eine feste cubische Raumcurve, welche O enthält. Wir haben also hier zwei verschiedene Typen von ∞^7-M_2^3-Systemen.

Beim ∞^5-System können wir $A_1, \ldots, A_4$ mit $O_1, \ldots, O_4$ coincidiren lassen, was $M_2^3(O^2)$ mit festem Osculationskegel und 4 Geraden durch O liefert, falls wir den C_2 mit Ω_2 identisch nehmen. Dazu sind wir nicht gezwungen; legen wir also C_2 frei durch $O_5\,O_6$, so haben wir ein ∞^6-M_2^3-System mit O^2 und einer festen Curve $C_4(O^2)$. Dieses System ist ersichtlich mit dem anderen nicht äquivalent, wie ein Vergleich der Transversalzahlen beweist, es ist aber ebensowenig mit einem M_2^2-System äquivalent, und da wir andere noch nicht untersucht haben, mögen wir es als einen neuen Typus erklären.

Beim ∞^4-System von C_3 erhalten wir ebenso nur ein System, eines enthalten im ∞^{10}-Systeme von $M_2^3(O^2)$ von vorhin, das andere entstehend durch einen Ergänzungskegelschnitt durch A_6, also ein $M_2^3(O^2)$-System mit fester Curve $C_5(O^3)$. Auch dieses System ist auf keines der vorigen reductibel.

Es ist zu verzeichnen, dass jedes dieser beiden Systeme ∞^6, ∞^7 (mit $C_4(O^2)$ und $C_5(O^3)$) sofort reductibel wird, wenn man die C_4, C_5 zerfallen lässt, aber nur insofern, als ein System entsteht, das Untersystem eines der bisherigen Typen, also "unvollständig" ist.

Beim ∞^3-System von C_3 müssen wir nun beachten, ob die 6 gemeinsamen Punkte des Bildes sollen in einem Kegelschnitte sein oder nicht. Im ersten Falle haben wir die nicht unterscheidende Möglichkeit, die Punkte $A_1, \ldots, A_6$ aus der freien Ebene heraus auf die $O_1, \ldots, O_6$ zu verlegen und erhalten ein Untersystem unseres ∞^{10}-Systemes von $M_2^3(O^2)$. Im zweiten Falle können wir, falls 5 Punkte sich rational von dem Sextupel abtrennen lassen, diese 5 auf $O_1, \ldots, O_5$ verlegen, müssen aber A_6 ausserhalb lassen und erhalten also ein Untersystem des vorigen $M_2^3(O^2)$ mit $C_5(O^3)$. Sind aber $\overbrace{A_1, \ldots, A_6}$ irrational verbunden, dann müssen wir sie frei in der Ebene wählen und erhalten nothwendig $C_2 \equiv \Omega_2$, also wieder ein Untersystem des ∞^{10}-Systemes. Im ersten Falle bleibt jedoch möglich, C_2 anders zu wählen und das, um kein Untersystem eines bekannten zu finden, eben so, dass wir C_2 ganz frei in der Ebene wählen. Dies liefert $M_2^3(O^2)$ mit fester $C_6(O^4)$. Auch dieses System ist nicht identisch mit den schon gefundenen Typen.

Das ∞^2-System gibt nun nothwendig ein Untersystem eines der bisherigen, das also durch Festlegung eines einfachen Raumpunktes entsteht, der aber auch so genommen werden kann, dass sich eine weitere gemeinsame Linie des $M_2^3(O^2)$-Systemes ergibt.

Diejenigen ∞^1-Systeme von C_3, welche zu $M_2^3(O^2)$-Systemen führen, die

nicht Untersysteme der vorigen Systeme sind, mögen hier nicht aufgezählt werden.

7. Aber es fehlen uns noch jene Systeme, welche alineirte Tripel enthalten. Da haben wir bei den $M_2^2(O)$ bei 3 bis 7 Punkten A_i des Bildes bez. 1, 1, 2, 4, 6 Alineationen als mögliches Maximum und dem entspricht, dass O mit 1, 1, 2, 4, 6 Tripeln (maxime) unter den übrigen 3 bis 7 Basispunkten complan ist.

8. Uebergehend zu den $M_2^3(O^2)$ können wir dort, wo mehr als drei A_i im Bilde ausserhalb der O_i sind, die Alineationen sofort eintragen; ebenso wenn wir in allen Fällen als Typen jene Systeme $M_2^3(O^2)$ gewählt hätten, wenn wir die A_i frei in die Ebene anstatt auf die O_i verlegen. Es ist nun aber unmöglich, sie dort einzuführen, wo die C_2, Ω_2 verschieden sind, also verschiedene A_i nothwendig auf die O_i verlegt werden müssen. Unter diesen $A_i \equiv O_i$ können nur dann Alineationen supponirt werden, wenn Ω_2 selbst in zwei Geraden zerfällt.

9. Wir sind damit zur Nothwendigkeit geführt, solche Systeme von $M_2^3(O^2)$ zu untersuchen, wo alle Osculationskegel zerfallen, denn würde ein conischer Punkt in O erscheinen, so könnte diese M_2^3 zur Abbildungsdiscussion benutzt werden. Ein solches System ist nur möglich 1. wenn eine der beiden Osculationsebenen in O fest ist, 2. wenn alle Ebenenpaare in einem Büschel enthalten sind. Wir discutiren zunächst den ersten Fall.

Sofort erhalten wir, indem wir auf der festen der beiden Geraden ω_1, ω_2, in die Ω_2 zerfällt, die drei Coincidenzpunkte $A_i \equiv O^i$ nehmen müssen, ein ∞^7-System von $M_2^3(O^2)$ mit biplanarem Doppelpunkte, einer festen Osculationsebene $O\omega_1$ und einer $C_3(O^2)$ und ein damit nicht äquivalentes ∞^7-System mit zwei festen Osculationsebenen in O und drei festen einfachen Geraden in einer derselben. Auch die $C_3(O^2)$ kann in $C_1(O) + C_2(O)$ oder 3 Geraden in $O\omega_1$ zerfallen.

Niederdimensionale Systeme, welche nicht in diesen beiden enthalten sind und gleichzeitig nicht äquivalent mit den bisherigen Typen wären, erscheinen nicht. Bei $\infty^9\, M_2^3(O^2)$ ist es kein Unterschied, ob der feste Osculationskegel zerfallend ist, weil dadurch nur eine sonst nicht distincte 2-punktige Transversale eintritt; analog beim ∞^8-System. Auch das System: $\infty^4\, M_2^3(O^2)$ mit Uniplanarität in O nebst fester Osculationsebene $O\omega_1$, sowie drei festen Geraden darin und festen Berührungsebenen längs dieser ist typisch nichts neues.

Ebenso ist das ∞^{10}-S. mit zerfallendem festem Osculationskegel äquivalent dem mit conischem Doppelpunkte.

Auch ist es bei festem Osculationsebenenpaar $O\omega_1$, $O\omega_2$ keine wesentliche Unterscheidung in Bezug auf die räumliche Aequivalenz, wenn man den Doppelpunkt von Ω_2 als Träger von zwei Punkten O_i nimmt (§ 2).

Sind in den einzelnen bisher behandelten Fällen mit Alineationen noch einfache Punkte A_i frei in der Ebene möglich, so können nicht äquivalente Systeme noch dadurch entstehen, dass unter diesen für sich oder unter ihnen mit Bezug auf die Punkte O_i Alineationen entstehen. Sie gehören in die aufzustellende Tabelle.

Bleibt der 2. Fall. Da die $O\omega_1$, $O\omega_2$ ein Büschel bilden, so sind alle Dispositionen der A_i mit festem Ω_2 ausgeschlossen. Es können aber, wie eine Discussion zeigt, weder mit $C_3(O)$, noch $C_4(O^2)$, $C_5(O^3)$, $C_6(O^4)$ Systeme von biplanaren Monoiden entstehen, solange die 6 Punkte O_i von den Punkten A theilweise verschieden sind. Es gibt aber eine Möglichkeit der Annahme, bei der keine festen Tangenten der Basiscurve in O entstehen, welche die Variabilität der ω stören, und ebenso keine O_i-Durchgänge für die $O\omega$; das ist, wenn C_2 ein Geradenpaar ist, dessen Scheitel mit dem des Geradenpaares ω_1, ω_2 coincidirt. Dies liefert ∞^4 $M_2^3(O^2)$ mit zwei festen Ebenen C_3, die in O eine gemeinsame Spitze mit gemeinsamer Spitzentangente haben.

$M_2^4(O^3)$. Das System K (§ 2, No. 4) bilden ∞^3 C_4 durch zwölf O_i in einer Cubik Ω_3. Die $M_2^4(O^3)$ schneiden in Curven, deren Bilder C_7 durch die O_i sind. Hier wie bei den M_2^5 u. s. w. existirt für das ∞^3-System C_3 ein Ergänzungs-C_4 durch die O_i, welche aber keine wesentlich neue Transversal-M_2 oder-M_1 im R_3 bedingt Alle so erhaltenen Complexe (in ∞^{10}-Systemen von Monoiden) sind birational äquivalent. Dasselbe gilt für die durch Annahme einfacher Basispunkte A. abzusondernden Untersysteme. Eine zweite Möglichkeit entsteht erst bei 3 alineirten Punkten A_i. Für $C_3 \equiv \Omega_3$ als Bestandtheil von C_4 entsteht nichts neues geht die C_4 durch 10, 9, 8, 7 Punkte O_i, während die übrigen O_i Punkte A_i für die C_3 sein sollen, entstehen M_2^4-Systeme, welche mit schon gefundenen $M_2^3(O^2)$-Systemen mit Basiscurve äquivalent sind. Jene Möglichkeit tritt beim ∞^3-System C_2 ein, wenn die 6 Punkte A_i nicht conconisch sind. Bei den $M_2^3(O^2)$ konnten wir dann die sechs A_i nicht mit O_i coincidiren lassen und wegen der Möglichkeit irrationaler Verknüpfung mussten wir Typen zulassen, wo die sechs A_i frei in der Ebene waren. Hier können wir in jedem Falle eine Annahme

machen, wo sechs $A_i \equiv O_i$ sind. C_4 enthält die übrigen sechs A_i und es entsteht ein neuer Typus, nämlich ein ∞^4-System von $M_2^4(O^3)$, mit fester $C_{10}(O^6)$.

Selbe Möglichkeit für 10 A_i und, wollten wir gleich auch ∞^1-Systeme schaffen, auch für 9 A_i. Es entsteht ein neuer Typus: $\infty^3 M_2^4(O^3)$ durch eine feste $C_{11}(O^7)$.

Es bleibt übrig, zu untersuchen, ob die C_3-Systeme mit Alineationen neue Typen liefern. Hier sind alle Combinationen von Alineationen unter 3 bis 7 Punkten O_i möglich, ohne das deswegen die Ω_3 zerfallen müsste. Es ist aber zu beachten, dass, wenn diese O_i nicht feste Geraden abbilden, dann erst durch die Lage der übrigen Punkte O_i zu sorgen ist, damit auf jeder $M_2^4(O^3)$ jene Geraden, welche die Complexcurven 1-punktig schneiden, diese besondere durch die Alineationen gekennzeichnete Lage besitzen, was aber für mehr als drei O_i nicht möglich ist. Für drei $O_i \equiv A_i$ erhalten wir das ∞^7-System, dessen Typus bei $M_2^3(O^2)$ gefunden wurde. Für die Stammsysteme der übrigen Alineationen müssen wir entweder feste Geraden durch O oder feste einfache Basispunkte verwenden.

Bei 7 Punkten A_i ist noch Combination von Alineationen mit conconischen Lagen möglich.

Da wir für alle verschiedenen C_3-Systeme (cf. §1 und Monatshefte, 1899) und alle irrational distincten Lagen derselben gegen die O_i je ein M_2^2, M_2^3, M_2^4-System erhielten, müssen wir über die M_2^4-Systeme gar nicht hinausgehen.

C_4-*Typus* $(A_1^2 A_2^2 A_3 \dots .)$.

$M_2^2(O)$ gestattet, sofern wir bei der Classe dieses § bleiben, kein System dieses Typus, weil bei gemeinsamem O die Bilder sofort C_3 werden.

$M_2^3(O^2)$. Bilder der Complexcurven waren die $C_5(O_1, \dots, O_6)$. C_4 erfordern als Ergänzungscurve eine Gerade. Daher können wir $\infty^8 C_4$ nicht situiren, auch nicht mit $A_1^2 \equiv O_1$, $A_2^2 \equiv O_2$, solange nicht Ω_2 zerfällt. Aber auch dann noch ist das ∞^8-System $M_2^3(O^2)$ mit fester Osculationsebene in O und zwei nicht in dieser Ebene enthaltenen Geraden durch O nicht typisch. Dagegen müssen wir allerdings für $C_4(\overbrace{A_1^2 A_2^2}\,\overbrace{A_3 A_4})$ ein System $M_2^2(O^2)$ mit zwei Geraden $g_1 g_2$ durch O und einer Geraden fremd zu O als typisch erklären, wenn wir am Rationalen festhalten. $g_1 g_2$ müssen sogar nicht irrational verknüpft sein.

Das ∞^5-System $M_2^3(O^2)$ mit ebener $C_3(O^2)$ und zwei auch nicht irrational verknüpften Geraden durch O ist ebenfalls typisch. Das ∞^6-System $M_2^3(O^2)$ mit

$C_2(O)$ und zwei jetzt aber nothwendig irrational verknüpften Geraden durch O ist typisch. Das aus ihm durch Festlegung eines freien einfachen Basispunktes A_4 ausgeschiedene ∞^5-System ist nicht typisch, sondern unter die vorhin erhaltenen Typen zu bringen.

$M_2^4(O^3)$. C_7 sind die Bilder der Complexcurven, als Ergänzungscurve der C_4 erscheint eine C_3. Für $A_1^2 \equiv O_1$, $A_2^2 \equiv O_2$ muss $C_3 \equiv \Omega_3$ sein und es entstehen als Complement die Geraden OO_1, OO_2 zweimal gezählt. Das bedeutet, dass die anderen Monoide das gegebene längs jeder dieser zwei Geraden berühren sollen. Also erhalten wir als typisch entsprechend den $\infty^8\, M_1^4(A_1^2 A_2^2)$ die $\infty^9\, M_2^4(O^3)$ mit festem Osculationskegel 3. O. in O und Berührung längs jeder von zwei sich in O schneidenden Geraden.

Die darin enthaltenen Untersysteme können wir durch Verlegung der A_3 bis A_8 auf die Punkte O_i repräsentiren, wodurch die Ergänzungs-C_3 schon bei $A_1^2 A_2^2 A_3 A_4$ frei von der Identität mit Ω_3 wird. Aber gerade bei dieser freien Wahl entstehen für $\ldots . A_3 A_4 \ldots . A_3 A_4 A_5$ keine neuen Typen. Für $\ldots . A_3 A_4 A_5 A_6$ nur dann, wenn $A_1 \ldots . A_6$ nicht conconisch sind, aber für $A_3 \ldots . A_7$ und $A_3 \ldots . A_8$ bekommen wir unter dem Gesichtspunkte des rein Rationalen zwei neue Systeme. Also: Typen sind Systeme von $M_2^4(O^3)$ mit zwei Geraden durch O und einer diese nicht schneidenden Curve $C_6(O^3)$, $C_7(O^4)$, $C_8(O^5)$.

Lassen wir aber $C_3 \equiv \Omega_3$ sein, so geben $\ldots . A_3 A_4 \ldots . A_3 A_4 A_5$ zwei neue Typen und ebenso auch $\ldots . A_3 A_4 A_5 A_6$, $\ldots . A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$, $\ldots . A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 B_8$, nämlich $M_2^4(O^3)$ mit festem Osculationskegel in O, Berührung längs zweier Geraden und ausserdem $2, \ldots . , 6$ einfachen Geraden durch O in solcher irrationaler Verknüpfung, wie sie in der bezogenen Arbeit aus den Monatsheften beschrieben ist.

Alineationen von je 3 Punkten in diese Typen einzuführen, hat hier keine Schwierigkeit. Sollen aber 4 Punkte alineirt sein, so muss, wenn dieselben nicht frei in der Ebene sein sollen, das M_2^4-System also ein Untersystem eines der höheren sein soll, das durch Hinzunahme einfacher Raumpunkte entsteht, Ω_3 in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen. So entsteht ein typisches System von $M_2^4(O^3)$ mit festem Osculationskegel, Berührung längs zweier Geraden derselben, mit einer gemeinsamen Curve $C_4(O^3)$. Auch diese Quadrupelalineation kann man noch mit Tripelalineationen verknüpfen.

$M_2^5(O^4)$. Wir bedürfen dieser Monoide für die Situirung von C_4-Systemen, um den sämmtlichen Alineationen Rechnung zu tragen, welche unter den

$A_1, \dots, A_8$ stattfinden können. Daher ist es auch passend, den letztvorigen Typus durch $M_2^5(O^4)$ zu ersetzen. Als Stammsystem können die $M_2^5(O_4)$ mit festem Osculationskegel und 5 einfachen Geraden durch O, längs denen sie sich berühren, angesehen werden.

C_5-Typus $(A_1^2 \; . \; . \; . \; A_5^2 \, A_6 \dots)$.

$M_2^2(O)$ *und* $M_2^3(O^2)$ gestatten ersichtlich nicht die Situirung dieses Typus in ihre Abbildungen.

$M_2^4(O^3)$ erfordert Ergänzungs-C_2 durch 7 Punkte auf Ω_3, also ist $C_5(A_1^2 \dots A_5^2)$ nicht möglich. Dagegen kann das ∞^2-System $C_5(A_1^2 \dots A_5^2 \overbrace{A_6 A_7 A_8})$ erreicht werden. C_2 ist dann das Bild einer $C_4(O^2)$. Also: das ∞^3-System von $M_2^4(O^3)$ mit 5 Geraden durch O und einer Curve $C_4(O^2)$ ist typisch, wenn die 5 Geraden irrational verknüpft sind.

$M_2^5(O^4)$ aber liefert weitere hieher gehörige Typen. Bilder der Complexcurven sind C_9 durch $O_1 \dots O_{20}$, auf einer Curve Ω_4. Werden $A_i \equiv O_i$ gemacht, so erhält man als Ergänzungscurve eine Curve 4. O. durch $O_6 \dots O_{20}$. Macht man $C_4 \equiv \Omega_4$, so entsteht ein typisches ∞^6-System von $M_2^5(O^4)$ mit festem Osculationskegel und Berührung längs 5 Geraden durch O. Ein anderes könnte entstehen, wenn durch die 15 O_i eine von Ω_4 verschiedene C_4 gienge, was aber nicht sein kann.

$M_2^6(O^5)$ erst liefert diesen gewünschten zweiten Typus. C_{11} sind die Bilder. Ergänzungscurve wird C_6 durch $O_6, \dots, O_{30}$ und das System ist $M_2^6(O^5)$ mit Basiscurve $C_{11}(O^5)$ ferner mit 5 irrational verknüpften Geraden durch O, welche die C_{11} sonst nicht schneiden. Beim ∞^2-System C_5 mit $A_6 A_7 A_8$ ist die Alineation leicht anzubringen.

C_6-Typus $(A_1^3 A_2^3 A_3^2 A_4^2 A_5^2 A_6 \dots)$.

$M_2^5(O^4)$ liefert erst brauchbare Abbildungen. Die Ergänzungs-C_3 muss bei ∞^2-C_6 durch 11 O_i gehen. Es entstehen $\infty^2 M_2^5(O^4)$ mit fester $C_4(O)$, Berührung längs dreier Geraden OO_3, OO_4, OO_5 und Osculation längs OA_1, OA_2, dann ein ∞^4 mit fester C_3 (nicht durch O) und derselben Geraden wie vorhin; dagegen sind ∞^5 mit festem Osculationskegel hier nicht möglich.

$M_2^6(O^5)$. Die Ergänzungs-C_5 muss beim ∞^6-System durch 25 O_i gehen. Lassen wir sie mit Ω_5 coincidiren, was nothwendig ist, da sonst $(O_1 \dots O_5) \equiv (A_1 \dots A_5)$ in einer Geraden sein müssten, so entsteht ein typisches ∞^7-System $M_2^6(O^5)$ mit festem Osculationskegel mit 3 einfachen Geraden OO_3, OO_4 OO_5 und Berührung längs zwei Geraden OO_1, OO_2. Untersysteme haben

Geraden durch O gemeinsam. Alineationen sind leicht anzubringen. Für die Irreductibilität ist hier allemal die betreffend vorgeschriebene (l. c.) irrationale Verknüpfung unumgänglich.

§5.—*Die rational distincten Typen linearer Systeme elliptischer Curven auf unicursalen M_2.*

Da der Curvencomplex rational gegeben ist, also auch das erzeugende M_{r-1}-System, so ist auch das erzeugte M_2-System rational distinct gegeben. Man kann also durch Vorschreibung rational gegebener Punkte eine der erzeugten M_2 rational distinct auswählen. Auf der so gewonnenen rational distincten M_2, von der wir überdies nach § (cf. das dortige Citat) wissen, dass sie (wenn auch mit Zuhilfenahme *accessorischer* Irrationalitäten) unicursal ist, muss das rational distinct erzeugte ∞^d-System elliptischer Curven sich nicht so verhalten wie das rational distinct gegebene ∞^d-System in der Ebene. Dieses hängt davon ab, dass durch die Abbildung irrationale Gebilde in das Bildcurvensystem eintreten können. Dies ist so zu verstehen:

Zu einem rational distinct gegebenen linearen Curvensysteme L ∞^i, $i > 2$, gibt es stets eine rational distincte Fläche M_2, deren ebene Schnitte durch jene Curven (1, 1)*-deutig abgebildet werden; desgleichen für ein M_{r-2}-System im Q_{r-1} eine M_{r-1} des R_r* aber zu einer rational distinct (etwa durch ihre algebraische Gleichung) gegebenen Fläche gibt es nicht immer eine rational distincte Abbildung derselben. Ich will M_2 die zu L hinzuconstruirte Fläche nennen.* Die Construction geschieht, indem man in allgemeinster Weise ("allgemein" bezüglich auf Geschlecht, Ordnung und Singularitäten) ein ∞^3-System auswählt, seine Curven als Individuen den ∞^3 Ebenen eines R_3 und hiemit die ∞^2-Systeme mit einem gemeinsamen Punkte P' den ∞^2 Ebenenbündeln mit Scheiteln P, die die gesuchte M_2 erfüllen werden, entsprechen macht. Desgleichen, wenn man alle ∞^i-Curven den ∞^i R_{i-1} eines R_i zuweist. Aus der letzteren M_2 geht die erstere durch Projection aus $i-3$ Punkten hervor.

Was aus der rational distincten Abbildung als Folge rational distinct existirt, muss auch auf der hiezu construirten M_2 rational distinct vorhanden sein und was dort rational distinct abgeleitet wird, muss auch auf M_2 rational distinct abgeleitet werden können. So kann es kommen, dass die Abbildung

* Ohne Erwähnung des Rationalen hat dieses Verfahren des Hinzuconstruirens zuerst Caporali ("Sui sistemi lineari tripli" in den Coll. math., 1879, Rom) in ausgiebigem Maasse verwendet.

rational gegebene Elemente—Punktgruppen—implicirt, deren Existenz auf M_2 die Transversalcurven eines gewissen Curvensystemes C—in unserem Falle mit $p = 1$—ändert (vermehrt), und eine Folge davon wird sein, dass diese Transversalcurven, weil sie jene implicirten Gebilde auf der einzelnen M_2 in Ausspruch nehmen, nicht zu Transversal-M_{r-1} des ganzen Complexes elliptischer Curven C Anlass geben. Hieher gehört nun das folgende wichtige Theorem:

THEOREM V.—*So oft es zu einem rational distinct gegebenen linearen Systeme von Curven* (M_{r-1}) *ein rational distinct daraus ableitbares Curven—*(M_{r-1})*—System gibt, kann man zwei Flächen* (M_r), *welche durch ein im ersten oder zweiten Systeme enthaltenes lineares System* (1, 1)*-deutig auf die Ebene* (R_r) *abbildbar sind, auch in rational distincter Weise eindeutig auf einander abbilden.*

Denn vermöge der (zu verfolgenden) Construction der beiden M_r wird jedem Punkte der einen ein Punkt des R_r und derselbe Punkt wird einem Punkte der anderen M_r entsprechen.*

Hier ist Zweck und Absicht, die Natur der ∞^d-Systeme von Curven $p = 1$ auf den rational distincten M_2 zu erforschen. Für $i \geqq 3$ können wir in einer von den Riemann'schen Methoden nicht verschiedenen Weise die M_2 eindeutig distinct—wenn auch nicht durch birationale Raumtransformationen—auf eine andere Fläche Y_2 abbilden, deren ebene Schnitte $p = 1$ haben. Y_2 wird nöthigenfalls unter Einziehung von Irrationalitäten auf ein Abbildungssystem L von Curven $p = 1$ abbildbar sein. Die Irrationalitäten werden als rationale Gruppen zweiter oder höherer Art erscheinen. Wird L räumlich birational transformirt, so wird an der Construction der Fläche, und wird L besonders durch die in der bezogenen Arbeit definirten rational distincten Transformationen transformirt, auch nichts an den Rationalitätsverhältnissen auf Y_2 geändert. Die Typen der L-Systeme für $p = 1$ habe ich hier oben in §3 beschrieben. Gegenwärtig muss also

---

* Mit Hilfe des Principes der "Verminderung der Functionen ϕ" hat F. Enriques in den Math. Ann., Bd. XLIX. diejenigen Classen unicursaler Flächen bestimmt, deren Individuen sich gegenseitig (1, 1)-deutig ohne Einführung numerischer Irrationalitäten auf einander abbilden lassen.

Aber gerade bei *dieser* Untersuchung ist das Princip der Verminderung nicht der wahre Grundgedanke und der geschickte italienische Verfasser hat nicht erkannt, dass das obige Theorem V seine Frage beherrscht, mit der ich mich übrigens hier gar nicht zu beschäftigen habe, da für die gegenwärtige Theorie und meine Behandlungsmethode derselben eine in jener Frage nur als kleines Stück erscheinende und nicht einmal in derselben Form zu stellende Frage erforderlich ist. Für jene Frage kann er sich nicht nur die Priorität zuschreiben, sondern ich will überhaupt an jener Frage als solcher einstweilen gar keinen Antheil haben. Also: die Verminderung der ϕ ist für seinen Gegenstand nur ein Mittel, um mein obiges Th. V in durchaus einheitlicher Weise anwenden zu können.

jeder derselben als Abbildungssystem einer nachzuconstruirenden Y_2 benützt werden. Diese Flächen werden alle rational von einander unterschieden sein, wäre es auch durch die Trennung der Geraden od. dgl. in rationale Gruppen. Der zweite Schritt wird sein, die auf diesen rational distincten Flächen Y_2 vorhandenen rational von einander verschiedenen linearen Systeme elliptischer Curven zu untersuchen.

Für den ersten Schritt wären die C_3, C_4, C_5, C_6-Typen der bezogenen Arbeit (Monatshefte, 1899) zu verwenden, aber da es uns hier nicht auf die Abzählung aller rational distincten Y_2, sondern auf die Präparirung für unseren zweiten Schritt ankommt, mögen wir die C_3, C_4-Typen, auf welche die C_4, C_5, C_6 *irrational* zurückgeführt werden können, allein verwenden, dann aus den gefundenen Y_2 die rational allgemeinsten Y_2 abstrahiren und an dieser Abstraction nun die Aenderungen bezüglich Irrationalität distinguiren.* Somit gestaltet sich der erste Schritt so:

$\infty^3 C_3$ durch 6 Punkte bilden eine F_3 mit rationalem Geradensextupel (das aber in niedere rationale Gruppen zerfallen kann) ab. Die Untersuchung der Abbildung lehrt 27 Geraden kennen und führt also durch Abstraction zu einer F_3 ohne rational distinctes Geradensextupel.

∞^3 C_3 durch 5 Punkte bilden F_4 mit Doppelkegelschnitt und rationalem Geradenquintupel ab, führt also durch Abstraction zu allgemeinen F_4 mit Doppel-C_2. Ein Unterfall tritt ein, wenn drei Punkte alineirt sind. Die F_4 hat dann einen Doppelpunkt und ist rational distinct auf die Ebene abbildbar.

∞^3 C_3 durch 4 Punkte bilden F_5 mit Doppelcurve 5. O. mit 3-fachem Punkte ab. Diese Y_2 lässt sich auf die F_3 abbilden gemäss dem Vorausgesandten. Im vorliegenden Falle ist das durch die $4A_i$ und die drei Nebenecken laufende C_3-Netz rational distinct ableitbar, also auch ein im Netze enthaltenes Büschel und das Paar weiterer Basispunkte, dann das $\infty^3 C_3$-System durch dieses Paar und die $4\,A_i$. Dieses ∞^3-System führt dann zur Abbildung auf eine F_3 und dann auf eine Ebene, weil ein rationales Geradenpaar der F_3 bekannt ist.

Zu einem anderen Beweise kann man sich aber des im ∞^3-Systeme enthaltenen Systemes in $C_1 + C_2$ zerfallender C_3 bedienen, deren C_1 sämmtlich einem einzigen Strahlbüschel angehören. Der Scheitel dieses Büschels ist ein rational

* Es kostet mich einige Überwindung, die Aufzählung der rational distincten M_2, wie sie sich vollständig aus meiner früher gegebenen Aufzählung der rational distincten linearen Systeme elliptischer Curven in der Ebene ergeben würde, wegzulassen.

distinct ableitbarer Punkt P_1. Sein conjugirter Punkt P_2 bezüglich $A_1 A_2 A_3 A_4$ ist ebenfalls rational distinct und $P_1 P_2$ bestimmen mit dem Vierecke wieder die Basis für das Abbildungssystem einer F_4 oder auch vermöge der beiden Strahlbüschel, deren Scheitel P_1, P_2 sind, sofort Abbildung auf die Ebene.

$\infty^3 C_3$ durch 3 Punkte bilden F_6 mit Doppelcurve 9. O. ab. Im Falle der abstrahirten Fläche fehlt die rationale Abbildbarkeit. Wir sahen im §1 dieser Arbeit, dass wir diesem merkwürdigen Systeme *kein rational distinctes Transversalensystem* zuordnen können.

$\infty^3 C_3$ durch 2, 1, 0 Punkte bilden F_7, F_8, F_9 ab. Dieselben können aber rational distinct auf die Ebene abgebildet werden. Denn (cf. §1) in allen drei Fällen ist das Geradensystem der Ebene ein *rational distinctes Transversalensystem* und ist auch rational distinct aus dem gegebenen C_3-Systeme ableitbar.

Es ist eben ein Corollar des Theoremes V, dass wenn aus dem Abbildungssysteme einer M_r das ∞^r-R_{r-1}-System des R_r rational distinct ableitbar ist, dass dann die M_r (1, 1)-deutig auf den R_r abbildbar ist.

$\infty^3 C_4$ durch $A_1^2 A_2^2$ gestatten die rational distincte Ableitung des Systemes der Kegelschnitte durch $A_1 A_2$; also ist nach meinem Theorem IV die M_2^8, die durch jene abgebildet wird, (1, 1)-deutig abbildbar auf die M_2^2, welche durch diese abgebildet wird.* In der That ist die M_2^2 *ohne rationalen Punkt* ein Typus.

Wir schliessen aus dieser Discussion:

THEOREM VI.—*Alle linearen $\infty^{i>2}$-Systeme elliptischer Curven im R_3 oder R_r, welche nur zwei Dimensionen erfüllen, sind von derselben Art, wie entweder* 1. *die Systeme in einer Ebene oder* 2. *auf einer M_2^2 oder* 3. *auf einer M_2^3 oder* 4. *auf einer M_2^4 mit eigentlichem oder zerfallendem Doppelkegelschnitt oder* 5. *auf einer M_2^6 mit Doppelcurve* 9. *Ord.*

Hiezu kommen die M_2^3 mit irrational verknüpften 2, 3, 4 Doppelpunkten, ebenso für No. 4. die $M_2^4 (C_2^2)$ mit irrational verknüpften Doppelpunkten.

Um nun den zweiten Schritt auszuführen und dies eben in der oben genannten verkürzten Art, haben wir noch auf M_2^2, M_2^3, M_2^4, M_2^6 rational distinct Systeme von Curven $p = 1$ zu erzeugen, nachdem wir die in M_2^1, also der Ebene befindlichen bereits in §1 beschrieben oder kurz erwähnten.

Wir benützen hiezu die irrationale Abbildung—und dies ist der Kern unserer Methode, wie sie aus dem in §2 und dem vorher in diesem § Gesagten resultirt—

* Auch wird man aus dem Obigen schliessen, dass die M_2^4 mit Doppelgerade, wenn auf ihr ein lineares ∞^3-System elliptischer Curven rational distinct existirt, auf die Typen von oben abbildbar ist.

und disponiren in der Abbildung das Bild des auf der M_2 zu erzeugenden (als rational distinct gewünschten) Systemes. Hiebei sind aber nur jene Fälle beizubehalten, wodurch dieses Schneiden mit anderen M_2 die supponirte M_2 noch nicht ihren Typus des Theoremes VI verliert. Das soll den Schluss dieses § bilden und wir beginnen, da No. 1 schon in §4 zur I. Classe geführt hat, mit der der No. 2 entsprechenden II. Classe.

*Die zweifach ausgedehnten ∞^d-Systeme der II. Classe (M_2^2).**

Auf M_2^2 gibt es ein einziges System von Curven $p=1$, bei dessen Ausschneiden M_2^2 nicht ihren Character des Theoremes VI verliert, dasjenige, dessen Abbildung die $C_4(O_1^2\, O_2^2)$ sind. Sie sind ausgeschnitten von allen M_2^2 des R_3.

Die zweifach ausgedehnten ∞^d-Systeme der III. Classe (M_2^3).

Dank den früher gegebenen rein rationalen Transformationen der ∞^d-Systeme elliptischer Curven auf ihre Typen können wir uns auf die Untersuchung derjenigen Bildsysteme in der Ebene beschränken, welche den unter Beachtung des Rationalen typischen Character haben.

Von den ∞^3 *Ebenen* des R_3 wird ein rational distinctes System von C_3 ausgeschnitten. *Das* ∞^4*-System* $C_3(A_1 \ldots\ldots A_5)$ kann zum Schnitte mit M_2^2 nur dann ergänzt werden, wenn $A_1 \ldots\ldots A_5$ gleichzeitig Basispunkte der M_2^3-Abbildung sind; Ergänzung ist $(A_1 \ldots\ldots A_5\, O_6^2)^3$, Bild eines Kegelschnittes. Also:

Ist auf M_2^3 ein Kegelschnitt rational distinct bekannt, so ist ein System von $M_1^4\, p=1$ rational ausschneidbar mittelst der M_2^2 durch den Kegelschnitt.

Ergänzung zum Schnitte mit M_2^3 ist $(A_1^2 \ldots\ldots A_5^2\, O_6^3)^6$, Bild einer $M_1^5\, p=2$. Also:

Ist auf M_2^3 eine Curve 5. *Ord.* $p=2$ *rational distinct bekannt, so ist ein System von $M_1^4\, p=1$ rational ausschneidbar mittelst der M_2^3 durch M_1^5.*

Ergänzung zum Schnitte mit M_2^4 ist $(A_1^3 \ldots\ldots A_5^3\, O_6^4)^9$, Bild einer $M_1^8\, p=7$. Also: Ist auf M_2^4 eine Curve 8. Ord. $p=7$ rational distinct bekannt, so ist ein System von $M_1^4\, p=1$ rational ausschneidbar mittelst M_2^4 durch M_1^5. Dies kann fortgesetzt werden über M_2^5 hinaus zu jedem n, aber die Basiscurve wird schon von M_2^5 an bedingen, dass sie in einer einzigen M_2^3 liege, was, wie wir sehen werden, für uns unbrauchbar ist. Uebrigens bemerken wir wohl, dass es sich hiebei stets um ein und dasselbe Curvensystem $\infty^4 M_1^4$ auf M_2^3 handelt, dass dieses nur von verschiedenen Flächensystemen ausgeschnitten werden kann.

---

* d bezeichnet die *unbestimmt* gelassene Dimension.

Das ∞^5-System C_3 mit $(A_1 A_2 A_3 A_4)$ unter den Fundamentalpunkten O_i wird zum Schnitt mit M_2^2 nicht zu ergänzen sein, zum Schnitte mit M_2^3 durch $(A_1^2 \dots . A_4^2 O_5^3 O_6^3)^6$, Bild einer $M_1^4 p = 0$. Also:

Ist auf M_2^3 eine $M_1^4 p = 0$ (2. Art) rational bekannt, so ist auf derselben ein lineares ∞^5-System $M_1^5 p = 1$ ausschneidbar mittelst M_2^3 durch M_1^4.

Wird ergänzt zum Schnitte mit M_2^4 durch $(A_1^3 \dots . A_4^3 O_5^4 O_6^4)^9$, Bild einer $M_1^7 p = 4$. Also: Ist auf M_2^3 eine $M_1^7 p = 4$ rational bekannt, so ist auf derselben ein lineares ∞^5-System $M_1^5 p = 1$ ausschneidbar mittelst M_2^4 durch M_1^7. Weiter müssen wir nicht gehen.

Das ∞^6-System C_3 mit $A_1 A_2 A_3$ unter den O_i wird zum Schnitte mit M_2^3 durch $(A_1^2 A_2^2 A_3^2 O_4^3 O_5^3 O_6^3)^6$, Bild dreier windschiefer Geraden, ergänzt. Hier müssen wir zum ersten Male beachten, dass nach §3 das Geradensystem als rational distinct für das C_3-System anzusehen ist, wenn ein Punkt A_i rational bekannt ist. Um also den Typus M_2^3 nicht zu verlieren und auf §4 zu fallen, müssen wir $A_1 A_2 A_3$ irrational verknüpft voraussetzen. In der That ist von den 3 windschiefen Geraden eine rational bekannt, so kann man die M_2^3 durch die Congruenz über die beiden anderen Geraden rational auf die Ebene abbilden und das System von M_2^3 in ein monoidales verwandeln. Also:

Ist auf M_2^3 ein irrational verknüpftes Tripel windschiefer Geraden bekannt, so ist auf derselben ein lineares ∞^6-System $M_1^6 p = 1$ ausschneidbar mittelst M_2^3 durch das Tripel.

Wird auch ergänzt durch $(A_1^3 A_2^3 A_3^3 O_4^4 O_5^4 O_6^4)^9$, Bild einer $M_1^6 p = 1$ zum Schnitte mit M_2^4. Durch die weiteren Curven ist nur eine einzige M_2^3 möglich und wir brechen treu unseren obigen Vorsätzen ab.

Das ∞^7-System C_3 mit $A_1 A_2$ unter den O_i wird zum Schnitte mit M_2^3 nicht zu ergänzen sein, zum Schnitte mit M_2^4 durch $(A_1^3 A_2^3 O_3^4 O_4^4 O_5^4 O_6^4)^9$, Bild eines Geradentripels; da aber zwei windschiefe Geraden darunter sind, so verliert die M_2^3 ihren typischen Character. Wird auch ergänzt durch $(A_1^4 A_2^4 O_3^5 \dots . O_6^5)^{12}$, Bild einer $M_1^8 p = 3$ zum Schnitt mit einer einzigen M_2^3.

Das ∞^8-System C_3 liefert durch $(A_1^4 O_2^5 \dots . O_6^5)^{12}$, Bild einer $M_1^6 + M_1^1$, die sich nicht schneiden, ebenfalls kein neues System und desgleichen das *∞^9-System C_3*.

Würden wir in einem dieser ∞^d-Systeme einen Punkt A_i ausserhalb der O_i angenommen haben, so hätten wir einfach ein Untersystem des jedesmal nächsten erhalten.

Das ∞^4-System C_4 mit $(A_1^2 A_2^2 A_3 A_4 A_5 A_6)$ unter den O_i wird zum Schnitte mit M_2^2 durch $(A_3 A_4 A_5 A_6)^2$, Bild eines Kegelschnittes, ergänzt, was oben vorkam, ebenso die weiteren Ergänzungen; das ∞^5-System zum Schnitt mit M_2^3 durch $(A_1 A_2 A_3^2 A_4^2 A_5^2 A_6^3)^5$, Bild von $M_1^4\, p = 0$, was oben vorkam, ebenso mit M_2^4, M_2^5, ... ; das ∞^6-System zum Schnitt mit M_2^3 durch $(A_1 A_2 A_3^2 A_4^3 A_5^3 A_6^3)^5$, Bild dreier Geraden, die sich nicht schneiden; das ∞^8-System zum Schnitt mit M_2^4 durch $(A_1^2 A_2^2 O_3^4 \dots O_6^4)^8$, Bild zweier windschiefer Geraden. Wir dürfen aber den C_4-Typus noch nicht verlassen. Werden $A_1^2 A_2^2$ ausserhalb der O_i genommen, und hiezu $A_3 \dots A_6$ auf der O_i, so ergänzt $(A_1^2, \dots A_6^2)^5$ zum Schnitte mit M_2^3, Bild einer $M_1^3\, p = 0$, deren Kenntnis die M_2^3 rational auf die Ebene abbildbar macht, desgleichen mit M_2^4, M_2^5 und werden die ∞^3-bis ∞^8-Systeme von C_4 genommen, so erhält man entweder nur eine M_2^3 oder Unmöglichkeit der Ergänzung. Wird nur A_2^2 ausserhalb der O_i genommen, so erhält man beim ∞^8-Systeme Ergänzung durch $(O_1^2 O_2^2 O_3^4 \dots O_6^4)^8$, was nicht möglich ist, oder $(O_1^3 O_2^5 \dots O_6^5)^{11}$, was zwei windschiefe Geraden implicirt; beim ∞^6- und ∞^5-Systeme desgleichen; das ∞^4-System $(O_1^2 O_2 O_3 O_4 O_5 A_2^2)^4$ mit A_2 ausserhalb der O gibt als Ergänzung zum Schnitt mit M_2^3 oder M_2^4 die Curve $(O_1 O_2^2 O_3^2 O_4^2 O_5^2 O_6^3)^5$, Bild von Gerade und Kegelschnitt, welche sich nicht schneiden. Sind also auf M_2^3 ein Punkt, eine Gerade M_1^1 und ein Kegelschnitt M_1^2 rational bekannt, wo M_1^1, M_1^2 sich nicht schneiden, so kann ein M_1^6-$(p = 1)$-System auf derselben ausgeschnitten werden mittelst M_2^3, welche M_1^1, M_1^2 enthalten und im Punkte die M_2^3 berühren. Das ∞^3-System C_4 wird durch $(O_1 O_2^2 \dots O_6^2)^5$, Bild einer $M_1^4\, p = 1$ zum Schnitt mit M_2^3 ergänzt.

Also: sind auf M_2^3 ein Punkt und eine Curve $M_1^4\, p = 1$ rational bekannt, so kann ein ∞^3-System $M_1^5\, p = 1$ ausgeschnitten werden mittelst M_2^3, welche M_1^4 enthalten und die M_2^3 im Punkte berühren. Aber beide Systeme sind äquivalent Untersystemen früherer.

Die C_5- und C_6-Systeme liefern, insofern es möglich ist, sie zu ergänzen, nur dieselben räumlichen Curvensysteme wie bisher. In den meisten Fällen tritt die M_2^3 aus ihrem Typus heraus.

Die zweifach ausgedehnten ∞^d-Systeme III. Classe (M_2^4).

Die ebenen Schnitte bilden ein typisches ∞^3-System auf $M_2^4\,(C_2^2)$, aber dieses ist nicht vollständig. *Das ∞^4-System* von $M_2^2\,(C_2)$ schneidet M_2^4 in einem ∞^4-Systeme elliptischer Curven M_1^4. Dasselbe System wird auch ausgeschnitten von

M_2^3 durch C_2 und eine $M_1^4\, p=1$, welche C_2 vierpunktig schneidet und auch durch die $M_2^4(C_2^2)$ mit fester $M_1^4\, p=1$ und durch die $M_2^5(C_2^2)$ mit fester $M_1^8\, p=5$.

Das ∞^5-*System* von $C_3(A_1 \ldots . A_4)$ erfordert als Ergänzung zum Schnitte mit $M_2^3(C_2)$ eine Curve $(A_1 \ldots . A_4,\ O_5^2)^3$, Bild einer $M_1^4\ (p=0)$. Also:

Ist auf einer $M_2^4(C_2^2)$ ein windschiefe Curve 3. O. oder eine $M_1^7\, p=3$ bekannt, so kann ein ∞^5-System von $M_1^7\, p=1$ mittelst $M_2^3(C_2)$ oder $M_2^4(C_2^2)$ beide durch die M_1^3 oder mittelst $M_2^5(C_2^2)$ oder $M_2^6(C_2^3)$ durch $M_1^7\, p=3$ ausgeschnitten werden.

Das ∞^6-*System* von $C_3(A_1 A_2 A_3)$ erfordert als Ergänzung zum Schnitt mit $M_2^3(C_2)$ eine Curve $(O_4^2\, O_5^2\, O_1\, O_2\, O_3)^3$, Bild von zwei windschiefen Geraden, die irrational verknüpft sein müssen. Zum Schnitte mit $M_2^4(C_2^2)$ durch $(O_4^2 O_5^2 O_1 O_2 O_3)^3$ dasselbe wie soeben und mit $M_2^5(C_2^2)$ durch $(O_4^3\, O_5^3\, O_1^2\, O_2^2\, O_3^2)^6$, Bild einer $M_1^6\, p=1$ und desgleichen mit $M_2^6(C_2^3)$.

Das ∞^7-*System* $C_3(O_1,\ O_2)$ erfordert als Ergänzung zum Schnitte mit $M_2^5(C_2^2)$ eine Curve $(O_3^3\, O_4^3\, O_5^3\, O_1^2\, O_2^2)^6$, Bild einer Geraden und einer $M_1^4\, p=0$ 2. Art, die sich nicht schneiden. Zum Schnitte mit M_2^3, die nicht durch C_2 geht, desgleichen. Das System dieser $M_2^4(C_2^2)$ ist reductibel auf ein System M_2^3, weil die Gerade rational gegeben sein muss.

Das ∞^8-*System* $C_3(O_1)$ wird ergänzt zum Schnitt mit M_2^3 durch $(A_1^2 A_2^2 \ldots A_5^2)^6$, also jedenfalls eine rat. dist. Gerade, was die M_2^4 auf M_2^3 reductibel macht, zum Schnitte mit M_2^4 durch $(O_1^4\, O_2^4\, O_3^4\, O_4^4\, O_5^3)^9$, Bild von M_1^1 und $M_1^7\, p=2$, mit $M_2^4\ (C_2)$ durch $(O_1^3\, O_2^3\, O_3^3\, O_4^3\, O_5^2)^6$, Bild von M_1^1 und M_1^2, mit $M_2^4(C_2^2)$ durch $(O_1^2\, O_2^2\, O_3^2\, O_4^2\, O_5)$, was unmöglich ist.

Das ∞^9-*System* C_3 wird durch $(O_1\, O_2\, O_3^2\, O_4^2\, O_5^2)^5$ zum Schnitt mit M_2^5 ergänzt; dies sind 4 windschiefe Geraden, aber durch sie geht nur eine einzige $M_2^4(C_2^2)$.

Das ∞^8-*System* $C_4(O_1^2\, O_2^2)$ wird durch Bildcurven ergänzt, denen keine verwendbare Curve auf der $M_2^4(C_2^2)$ entsprechen kann. *Das* ∞^6-*System* $C_4(O_1^2 O_2^2 O_3 O_4)$ wird zum Schnitte mit M_2^2 ergänzt durch $(O_3\, O_4\, O_5^2)^2$, also in R_3 ein Paar windschiefer Geraden. Also: Ist auf einer $M_2^4(C_2^2)$ ein Paar windschiefer Geraden bekannt, so kann ein ∞^8-System von Curven $p=1$ mittelst M_2^2 oder $M_2^3(C_2)$ durch die Geraden ausgeschnitten werden.

Zum Schnitte mit M_2^3 durch $(O_1\, O_2\, O_3^2\, O_4^2\, O_5^3)^5$, Bild einer $M_1^6\, p=1$, zum Schnitt mit $M_2^3(C_2)$ durch $(O_3\, O_4\, O_5^2)^2$, mit M_2^4 durch $(O_1^2\, O_2^2\, O_3^3\, O_4^3\, O_5^4)^8$, Bild einer $M_1^{10}\, p=7$, durch welche nur eine $M_2^4(C_2^2)$ geht. Also bleibt nur $M_2^4(C_2)$ durch $M_1^6\, p=1$. Das ∞^5-System C_4 liefert nichts Neues.

Das ∞^5-C_5-System liefert $M_2^4(C_2^2)$ durch $M_1^3(p=0)$; eine Disposition einzelner Doppelpunkte ausserhalb der O^i ist unmöglich wegen der irrationalen Verknüpfung von $O_1^2 \ldots . O_5^2$.

Das ∞^6-C_6-System liefert $(A_1^3 A_2^3 A_3^3 A_4^2 A_5^2)^6$ und wird zum Schnitt mit $M_2^4(C_2^2)$ durch zwei windschiefe Geraden ergänzt.

Die zweifach ausgedehnten ∞^d-Systeme V. Classe (M_2^6).

Abbildung der ebenen Schnitte geschieht durch $\infty^3 C_3(O_1 O_2 O_3)$. Das Bild der Doppelcurve 9. Ordnung ist in der Ebene eine Curve 9. O. durch $O_1^3 O_2^3 O_3^3$. Die ∞^6 Curven $C_3(O_1 O_2 O_3)$ sind Bilder der Schnitte von $M_2^6(C_9^2)$ mit M_2^4, welche die C_9 enthalten. Die C_9 ist also in einer M_2^3 enthalten und ist also die Basis eines ∞^1-Systemes von $M_2^6(C_9^2)$. C_9 hat $p=9$. Wir können daher auch keine $M_2^5, \ldots .$ zum Ausschneiden der Curvensysteme verwenden, da die Basiscurve die $M_2^6(C_9^2)$ vollständig bestimmen würde.

§6.—*Die eigentlichen Complexe elliptischer Curven im R_3, deren zweifach ausgedehnte Systeme von den Classen II bis V sind.*

1. In §4 sind die Complexe der I. Classe erschöpft worden. Nachdem wir nun die Typen der zweifach ausgedehnten Systeme elliptischer Curven, die in einem Complexe überhaupt noch vorkommen können, festgesetzt haben, müssen wir die Möglichkeit untersuchen, jene Complexe, in denen diese Typen als Untersysteme vorkommen, auf eine möglichst geringe Anzahl nicht äquivalenter Typen zu reduciren.

2. *Classe II.* Wie die Abbildung zeigt, gibt es für das einzige hiebei erhaltene typische System, nämlich $\infty^8 M_1^4$, ein rational distinctes Transversalensystem ∞^3, die Transversalen sind selbst rational. Also muss es für das ∞^9-System von M_2^n, wenn diese M_2^n den M_2^2-Typus haben, ein ∞^3-System von M_2^m geben, welche die M_2^n in rationalen Curven schneiden, weil diese Curven die M_2^n in Punktepaaren schneiden müssen, indem das Transversalensystem den Rang 2 hat. Das System ist ausserdem vollständig; daher folgt nach dem Lemma in Amer. Journ., XXIII, p. 13, dass es homoloidal im R_3 ist. Wird dieses also zu einer Transformation benützt, so erhalten wir die M_2^n verwandelt in M_2^2. Also:

Diejenigen M_2^n-Systeme mit gegenseitigen elliptischen Schnitten, deren zweifach ausgedehnte Curvensysteme (also deren M_2^n)—vom M_2^2-Typus sind, sind räumlich birational äquivalent mit dem ∞^9-M_2^2-System oder einem durch 2, 3, ... 8 Punkte

daraus ausgeschiedenen Untersysteme, wobei aber diese Punktgruppen so irrational verknüpft sein müssen, dass kein einzelner Punkt rational gegeben ist.

Denn, wenn ein Punkt rational gegeben wird, fällt das System unter den §4.

3. *Classe III.* Hier ist folgende Feststellung nothwendig: Geht man die typischen Systeme der Reihe nach durch, so sieht man, wie in Anbetracht der Transversalzahlen (cf. §1) das System der ∞^3 Ebenen des R_3 eine einzigartige Rolle inne hat. Es gibt kein anderes vollständiges lineares ∞^3-System von M_2, die die Curven des Complexes und die mit ihnen in Zusammenhang stehenden Curven in ebenso vielen Punkten schneiden würden wie die Ebenen also u. A. die Complexcurven resp. in 4, 5, 6, 6, 5 Punkten. Das Gesammtsystem der vorliegenden M_2^3 besitzt in sich dieselbe Transversalzahl und dieses System ist als M_2-System selbst rational distinct. Aber in diesem ist kein anderes System vom Range 1 enthalten, das die M_2^3, welche den Complex erzeugen, in elliptischen Curven mit gleicher Transverzahl schnitte.

Das *System der ebenen Schnittcurven* ist also für jene gefundenen Curvensysteme auf den M_2^3, also auch auf den M_2^n ihres Typus das entsprechende ∞^3-System, ein rational distinctes Transversalensystem;* wir schliessen mit Hilfe des in §2. u. 1. Gesagten, dass es dann auch ein System von M_2^m geben muss, welches die sämmtlichen Curven des Complexes in ebensovielen Punkten schneidet und also die M_2^n gerade *in jenen ∞^3 Transversalcurven* des rational distinct ableitbaren Systemes *schneidet.*

Diese M_2^m müssen nun ein System von Curven erzeugen (als gegenseitige Schnitte), die jene M_2^n in Punktetripeln treffen. Da wir nun aber mindestens ∞^3-Systeme M_2^n untersuchen und die ∞^2-Systeme noch nicht einer systematischen Discussion unterziehen wollen, können wir auf einer solchen Curve 2 Punkte nehmen, durch sie die M_2^n legen, welche noch ∞^1 sein werden und aber jede dieser Curven noch in einem variabeln Punkte schneiden, also sind diese Curven rational. Sonach ist aus jedem Curvencomplexe $p=1$, dessen M_2^m vom M_2^3-Typus sind, auf rational distincte Art ein vollständiges lineares ∞^3-System von M_2 mit rationalen gegenseitigen Schnittcurven ableitbar und die Schnittcurven treffen die M_2^n in Punktetripeln. Nach dem mehrfach von mir angewandten Lemma† ist dieses System homaloidal. Wird es zu einer Raumtransformation

* Man würde den Sinn der Transversalenmethode misverstehen, wenn man daraus schliessen wollte dass auch das System der R_2 selbst für die Curven rationaldistinct sei.

† Amer. Journ. of Math., XXIII, p. 13.

verwendet, so wird durch diese M_2^n-Systeme eben in das M_2^3-System übertragen. Daher:

Diejenigen eigentlichen Complexe von Curven $p=1$, deren zweifach ausgedehnte Curvensysteme also (erzeugende M_2) von der Classe III. (M_2^3-Typus) sind, sind räumlich birational äquivalent mit

1. *dem ∞^5-System von M_2^3 durch M_1^5 $p=2$,*

2. *dem ∞^6-System von M_2^3 durch M_1^4 $p=0$* (2. Art),

3. *dem ∞^6-System von M_2^3 durch ein irrational verknüpftes Tripel windschiefer Geraden,*

4. *einem der Systeme M_2^3 mit* 2, 3, 4 *irrational verknüpften Doppelpunkten und gegenseitigen elliptischen Schnittcurven,*

5. *einer der Degenerationen, die aus n.* 1. *durch Zerfallen von M_1^5 in a) M_1^4 $p=1$ mit Bisecante oder b) zwei irrational verknüpfte M_1^2 und eine beide schneidende Gerade hervorgehen (die übrigen Degenerationen gehören nach Classe I.),*

6. *der Degeneration, die aus n.* 2. *durch Zerfallen von M_1^4 in zwei sich einpunktig schneidende Kegelschnitte entsteht,*

oder mit niederdimensionalen Systemen, welche aus diesen durch Annahme fester einfacher Basispunkte im R_3 entstehen.

Classe IV. Dieselbe Beweisführung wie für Classen II. und III. gilt für den $M_2^4(C_2^2)$-Typus und ergibt:

Jene eigentlichen Complexe von Curven $p=1$, deren zweifach ausgedehnte Curvensysteme also (erzeugende M_2) den M_2^4-Typus haben, sind sämmtlich birational äquivalent mit

1. *dem ∞^5-System von $M_2^4(C_2^2)$ durch M_1^4 $p=1$,*

2. *dem ∞^6-System von $M_2^4(C_2^2)$ durch M_1^3 $p=0$,*

3. *dem ∞^7-System von $M_2^4(C_2^2)$ durch zwei irrational verknüpfte windschiefe Geraden,*

4. *denselben drei Systemen, aber mit irrational zerfallendem Doppelkegelschnitt oder einem Systeme, das aus diesem durch Festsetzung irrational verknüpfter einfacher Basispunkte entsteht.*

§7.—*Die vollständigen ∞^3-Systeme mit elliptischen Complexcurven im R_3.*

Aus den Untersuchungen der §§4 und 5 können wir ein wichtiges Resultat ziehen: *Es gibt in R_3 kein vollständiges ∞^2-System einer der IV. Classen. Sie können alle aus höher dimensionalen Systemen durch Festsetzung einfacher Basispunktgruppen ausgeschaltet werden.*

Zur vollständigen Erkenntnis bleibt uns noch übrig, jene Flächenabbildungen zu discutiren, wo man von einem ∞^2-System $C_n\, p = 1$ auch nur zu einem ∞^2-Systeme von Curven geführt wird, das auf M_2 rational distinct vorhanden ist. Hiezu wird uns in Anwendung des Theoremes IV *jede* Fläche dienen können, die in die Ebene auf ein Curvensystem abgebildet wird, das aus dem ∞^2-System rational distinct ableitbar ist. Es gibt hier deren verschiedene. Die *inversen* Adjungirten* führen in einfachster Weise zum Ziele. Nämlich aus dem ∞^2-Systeme von C_3, C_4, C_5, C_6 mit resp. $(A_1, \ldots . A_7)$, $(A_1^2 A_2^2 A_3 \ldots . A_6)$, $(A_1^2, \ldots . A_5^2)$, $(A_1^3 A_2^3 A_3^2 A_4^2 A_5^2 A_6 \ldots . A_9)$ ist das System C_6, C_7, C_8, C_9 mit resp. $(A^2, \ldots . A_7^2)$, $(A_1^3 A_2^3 A_3^2 \ldots . A_6^2)$, $(A_1^3 \ldots . A_5^3)$, $(A_1^4 A_2^4 A_3^3 A_4^3 A_5^3 A_6^2 \ldots . A_9^2)$ rational distinct ableitbar. Wenn somit auf einer M_2 ein vollständiges ∞^2-System von Curven $p = 1$ erscheint (also ohne einfache Basispunkte) dessen Typus der der C_3, C_4, C_5 in der Ebene bei irrationaler Abbildung wird, so ist diese Fläche rational distinct auf eine M_2^8 abbildbar, deren Abbildungsystem aus den genannten C_6, C_7, C_8, C_9 besteht.

∞^6-*System* C_6. Wir erhalten eine Vereinfachung dadurch, dass mit den $\infty^2 C_3$ auch die einzelnen Büschel, also die einzelnen Punktepaare der Ebene, welche zu Basisnonupeln ergänzen, rational distinct gegeben sind. Setzen wir zwei solche Paare zu den 7 Doppelpunkten hinzu, so erhalten wir immer noch ein rational distinctes ∞^3-System. Durch diese 11 Punkte geht stets eine C_3; die Fläche, auf welche wir jetzt rational distinct abgebildet haben, ist die von Nöther† entdeckte M_2^4 mit Selbstberührungspunkt O; das Curvennetz ist das der C_4 mit Selbstberührungspunkt, welche von den Ebenen durch O ausgeschnitten werden.‡

Der letzte Typus von Flächen, auf denen ein ∞^2-System elliptischer Curven rational distinct ausgeschnitten werden kann, ist der, dessen Repräsentant die M_2^4 mit Selbstberührungspunkt ist.

Die ∞^5-Systeme C_7, C_8 und das ∞^4-System C_9 von hier vorher führen zu keinem neuen Typus. Für C_7 und C_8 ist das ∞^3-System C_2 durch A_1, A_2 rational distinct ableitbar, daher nach Theorem V. die Flächen M_2^7 und M_2^6 auf die M_2^2 und

---

* Act. Math., Bd. XIX. "Neue Theorie etc."

† Gött. Nachr. 1870.

‡ In der von mir schon genannten Arbeit des F. Enriques in Math. Ann., Bd. XLIX, ist gesagt, dass die Flächen mit vollständigem ∞^2 Systeme elliptischer Curven die (1, 1)-deutige Abbildung auf eine elliptische Doppelebene gestatten. Damit ist aber nichts gewonnen und diese Angabe ist für die Anwendung werthlos. Hier ist der Ersatz durch die M_2^4 mit tacnode unerlässlich. Enriques kannte diesen Typus nicht.

wegen des beim C_9-System rational distincten Systemes $C_3(A_1 \ldots . A_5)$ diese M_2^7 auf die $M_2^4(C_2^2)$ rational distinct abbildbar sind. Aehnliches ist für C_9 durchführbar.

Um nun die M_2^n-Systeme, deren M_2 diesem Typus angehören, auf Typen zu bringen, wenden wir wieder das Transversalenprincip aus §7 an. Zwar ist für die C_4 durch den Selbstberührungspunkt das Ebenensystem des R_3 nicht rational distinct, aber das M_2^2-System mit Berührung in O an den Flächen M_2^4. Die Schnittcurven mit M_2^4 bilden Transversalen, deren Analoge auch auf den M_2^n irgend eines Systemes unserer Classe wieder erscheinen müssen, also auch das ∞^6-System von Transversal-M_2^m, deren Schnittcurven C die M_2^n in Punktequadrupeln treffen und welches unter diesen Curven C ein ∞^2-Bündel rationaler Curven hat, die die M_2^n in Punktepaaren treffen. Wegen des ∞^3-Systemes M_2^n können wir auf allen Curven $C\,\infty^1$ quadratische Involutionen ausschneiden, indem wir je zwei Punkte für die M_2^n fest legen, also sind die C jedenfalls elliptisch. Ohne erst nachzuweisen, dass sie sogar rational sind, was sie thatsächlich sind, könnten wir im Falle $p=1$ durch estlegung Feiner festen Berührungsebene der M_2^m ein homaloidales System derselben ausschalten, mittelst dem transformirt das M_2^n-System sich in ein ∞^3-M_2^4-System verwandeln muss, das das ∞^2-System von elliptischen Curven liefert. Eine weitere Discussion führt dann dazu, dass diese M_4^2 nur vom gegenwärtigen Typus sein können:

Jeder eigentliche Complex von Curven $p=1$ in einem vollständigen ∞^3-M_2-Systeme, dessen M_2 vom Typus der M_2^4 mit tacnode sind, ist räumlich birational äquivalent einem ∞^3-Systeme von M_2^4 mit tacnode selbst, welche sich in einer Schnitt curve auf $M_2^3\,(O)$ schneiden.

§8.—*Die uneigentlichen Complexe elliptischer Curven im R_3, ihre Auffindung.*

Von den beiden erzeugenden M_2-Systemen sei eines vom M_2^1 oder M_2^2- oder M_2^3- oder M_2^4-Typus.

Classe I. In diesem Falle entsteht sofort ein ∞^2-System einpunktiger Transversalen und also das monoidale System. Diese Complexe sind in §3 untersucht worden bis auf jene, wo nur ein Büschel solcher Flächen vorhanden ist. Dies lässt sich stets rational distinct auf ein Ebenenbüschel beziehen. In den Ebenen können dann entweder Systeme vom C_3-, C_4-, C_5- oder C_6-Typus erscheinen, wodurch 4 Classen uneigentlicher Complexe entstehen.

Classe II. Das mögliche System der $\infty^8 M_1^4$ hat auf M_2^2 ein rational distinctes Transversalensystem, nämlich das der ∞^3 Kegelschnitte vom Range 2.

Solches muss auch auf jeder M_2^n eines der fraglichen Systeme sein, ausgeschnitten nach §2 von einem ∞^3 M_2^m-Systeme, von dem wie in §6 die Rationalität der gegenseitigen Schnittcurven und der Rang 1 bewiesen wird. Transformation damit führt auf ein M_2^2-System und wir finden: Uneigentliche Complexe mit einem erzeugenden Systeme vom M_2^2-Typus sind räumlich birational äquivalent einem Complexe, der von den M_2^2 und M_2^3 durch einen festen Kegelschnitt oder einen, der von den M_2^2 und M_2^4 durch eine feste $M_1^4\, p = 1$ erzeugt wird.

Classe III. Wir haben die Discussion der M_2^3 in §6 durchzugehen, zu bemerken, dass für die dort auf M_2^3 erzeugten Curvensysteme, welche jedesmal dieselben sind wie die in §7 verwendeten, die von den Ebenen ausgeschnittenen Transversal-C_3 rational distincte Systeme bilden, dass deren also auch auf den M_2^n desselben Typus erscheinen müssen, die dann wieder von einem Systeme M_2^m, das den Rang 1 erkennen lässt, ausgeschnitten werden, um mittelst einer Transformation zu schliessen: Uneigentliche Complexe, von deren erzeugenden Systemen keines der Classe I oder II ist, eines aber der Classe III ist, sind räumlich birational äquivalent einem Complexe erzeugt von M_2^3 und M_2^4 durch eine $M_1^8\, p = 7$ oder $M_1^7\, p = 4$ oder $M_1^6\, p = 1$ oder durch $M_1^6\, p = 2$ nebst Berührung in einem festen Punkte oder durch $M_1^7\, p = 5$ nebst Berührung in einem freien Punkte. Hiezu kommt der uneigentliche Complex aller C_3, in denen die Ebenen des R_3 alle M_2^3 schneiden. Endlich können die Basiscurven M_1^6, M_1^7, M_1^8 sich zerlegen. Dies darf jedoch nur so geschehen, dass der M_2^3-Typus sich nicht ändert.

Classe IV. Hier müssen wir beachten, dass in einzelnen Fällen zwar nicht das System der ∞^3 Ebenen, wohl aber das der $\infty^2 M_2^2\,(C_2)$ ein rational distinctes Transversalensystem liefert. Die anzuwendenden Transformationen sind dieselben wie in §7; die nöthigen Vorarbeiten sind in §6 durchgeführt. Uneigentliche Complexe, von deren erzeugenden M_2-Systemen eines der Classe IV ist, sind räumlich birational äquivalent einem Complexe, erzeugt von den $M_2^4\,(C_2^2)$ und den M_2^3 durch C_2 und eine $M_1^3\, p = 0$ (ein System ist dann vom monoidalen T.) den $M_2^4\,(C_2^2)$ und $M_2^3\,(C_2)$ durch zwei windschiefe Geraden (desgleichen), den $M_2^4\,(C_2^2)$ mit den $M_2^4\,(C_2)$ durch $M_1^8\, p = 5$ oder $M_1^7\, p = 3$ oder $M_1^6\, p = 1$. Kommt es nur auf den Complex an, so ist der erste dieser Aufzählung identisch mit dem ersten der unter Classe III. hier aufgezählten,

Classe V. Die $M_2^6\,(C_9^2)$ geben zu einem Complexe elliptischer Curven Anlass vermöge der Ebenen des Raumes und dann vermöge der M_2^4 durch die Doppelcurve, hierüber §5.

$M_2^4(O^2)$ mit tacnode führt nur zu dem Systeme der Schnitte der sämmtlichen M_2^4 dieser Art mit gegebenem tacnode und gegebener Berührungsebene mit allen Ebenen durch diesen Punkt und zu keinem anderen Complexe, weil diese Curven nur mittelst Flächen ausgeschnitten werden können, durch deren Basiscurve höchstens eine solche M_2^4 hindurchgehen kann.

§9.—*Die Typen uneigentlicher und eigentlicher Complexe elliptischer Curven im R_3.*

Die gewonnenen Resultate sollen nun gesichtet und zusammengefasst werden. So entsteht das

THEOREM VII.—A. Die *uneigentlichen* Complexe elliptischer Curven sind auf rational distincte Art räumlich birational äquivalent den folgenden Typen.*

Classe I. Schnitt eines linearen ∞^u-Systemes elliptischer Kegeln mit gemeinsamem Scheitel O und von einem der früher gegebenen Typen mit einem linearen ∞^{n_1}-Systeme von Monoiden $M_2^n(O^{n-1})$. Hier ist n_1 unbeschränkt gross.†

Classe II. 1. Schnitt der M_2^2 mit den M_2^3 durch einen beiden gemeinsamen Kegelschnitt. Von den M_2^3 genügt auch ein System mit 9 festen Basispunkten ausserhalb den M_2^2.

2. Schnitt der M_2^2 mit den M_2^4 durch eine beiden gemeinsame $M_1^4\, p=1$, nebst Degenerationen durch Zerfallen der Basiscurve bei irrationaler Verknüpfung.

Classe III. 1. Schnitt der M_2^3 mit den M_2^4 durch eine beiden gemeinsame $M_1^8\, p=7$.

2. oder $M_1^7\, p=4$,

3. oder $M_1^6\, p=1$,

4. oder $M_1^6\, p=2$ und mit Contact in einem freien Punkte,

5. oder $M_1^7\, p=5$ mit Contact in einem freien Punkte.

Classe IV. 1. Schnitt der $M_2^4(C_2^2)$ mit den $M_2^3(C_2)$ durch eine beiden gemeinsame $M_1^4\, p=1$.

2. Schnitt der $M_2^4(C_2^2)$ und $M_2^4(C_2)$ durch $M_1^8\, p=5$,

3. der $M_2^4(C_2^2)$ und $M_2^4(C_2)$ durch $M_1^7\, p=3$,

4. der $M_2^4(C_2^2)$ und $M_2^4(C_2)$ durch $M_1^6\, p=1$,

5. der $M_2^4(C_2^2)$ und $M_2^3(C_2)$ wie n. 1 aber mit zwei irrationalen M_1^2,

---

* Hier kommt es nur darauf an, die typischen Complexe zu finden. Anders gestaltet sich das Resultat bei der Frage nach den typischen Paaren von M_2-Systemen. Diese Frage kommt dann in der Theorie der Transformationsgruppen in die erste Reihe.

† Hier herein gehört die Gesammtheit aller ebenen C_3, $p=1$, etc.

6. Degenerationen von n. 3. bis n. 5 durch Zerfallen der M_1^8, M_1^7, M_1^6,

7. Degenerationen von n. 1 bis n. 6 durch Zerfallen der C_2 in zwei irrationale Gerade.

Classe V. 1. Schnitt von $\infty^1 M_2^6 (C_9^2)$ mit den $M_2^4 (C_9)$,

2. Degenerationen von n. 1. durch Zerfallen der C_9.

Hiezu kommen als Typen noch Untersysteme, die aus den aufgezählten Systemen durch Festsetzung einfacher Basispunkte entstehen, die entweder beiden erzeugenden M_2-Systemen oder nur einem derselben gemeinsam sind, und welche in einzelnen Fällen nicht rational sein dürfen.

B. Die *eigentlichen* Complexe sind auf rational distincte Art räumlich birational äquivalent folgenden Typen:

C_3-*Typus*:

Classe I. 1. $\infty^u M_2^2$ durch einen rational gegebenen Punkt O und weitere irrational verknüpfte Punktgruppen, unter denen auch mit O complane Tripel sein können, wodurch eine typische Untereintheilung entsteht; $u < 9$.

2. $\infty^{10-\alpha} M_2^3 (O^2)$ mit festem Osculationskegel in O und $\alpha = 0$, 1, ... 6 festen Geraden durch O oder im Falle $\alpha = 6$ mit 6 freien einfachen Basispunkten, welche in keinem Quadrikegel mit dem Scheitel in O enthalten sind.* Die Geraden oder Punkte können verschiedentlich irrational verknüpft sein,

3. $\infty^7 M_2^3 (O^2)$ mit $M_1^3 (O)$,

4. $\infty^6 M_2^3 (O^2)$ mit $M_1^4 (O^2)$,

5. $\infty^5 M_2^3 (O^2)$ mit $M_1^5 (O^3)$,

6. $\infty^4 M_2^3 (O^2)$ mit $M_1^6 (O^4)$,

7. $\infty^7 M_2^3 (O^2)$ mit einer festen Osculationsebene in O und einer festen, nicht in dieser enthaltenen $M_1^3 (O^2)$, die nicht zerfallen soll.

8. $\infty^4 M_2^3 (O^2)$ durch zwei feste ebene Curven 3. O., welche in O eine gemeinsame Spitzentangente haben,

9. $\infty^4 M_2^4 (O^3)$ mit fester $C_{10} (O^6)$,

10. $\infty^3 M_2^4 (O^3)$ mit fester $C_{11} (O^9)$,

(Hieher würde auch das ∞^2 System $M_2^4 (O^3)$ mit fester $C_{12} (O^{10})$ gehören).

---

* Wenn man nicht darauf hält, die Ordnungen der Complexcurven zu vereinfachen, kann man auch statt der Typen, die $\alpha = 1, \ldots 5$ Geraden durch 0 enthalten, solche wählen, wo $\alpha = 1, \ldots 5$ freie einfache Basispunkte vorhanden sind.

C_4-Typus

11. $\infty^7 M_2^3(O^2)$ mit zwei Geraden durch O und einer Geraden fremd zu O,

12. $\infty^5 M_2^3(O^2)$ mit zwei Geraden durch O und $M_1^3(O^2)$,

13. $\infty^9 M_2^4(O^3)$ mit festem Osculationskegel und Berührung längs zweier Geraden durch O,*

14. $\infty^7 M_2^4(O^3)$ mit zwei Geraden durch O und $M_1^4(O)$,

15. $\infty^6 M_2^4(O^3)$ mit zwei irrational verknüpften Geraden durch O und $M_1^5(O^2)$,

16. $\infty^5 M_2^4(O^3)$ mit zwei Geraden durch O und $M_1^6(O^3)$,

17. $\infty^4 M_2^4(O^3)$ mit zwei Geraden durch O und $M_1^7(O^4)$,

18. $\infty^3 M_2^4(O^3)$ mit zwei Geraden durch O und $M_1^8(O^5)$.

C_5-Typus

19. $\infty^6 M_2^4(O^3)$ mit 5 Geraden durch O, die irrational verknüpft sein müssen und $M_1^4(O^2)$,

20. $\infty^6 M_2^5(O^4)$ mit festem Osculationskegel und Berührung längs 5 irrational verknüpfter Geraden,

21. $\infty^6 M_2^5(O^9)$ mit $M_1^{11}(O^5)$ und einem rationalen Geradenquintupel durch O.

C_6-Typus

22. $\infty^6 M_2^5(O^4)$ mit $M_1^4(O)$ und Berührung längs dreier, Osculation längs zweier je irrational verknüpfter Geraden durch O,

23. $\infty^5 M_2^5(O^4)$ mit $M_1^3(O)$ und Geraden wie in 22.

24. $\infty^7 M_2^6(O^5)$ mit Geraden wie in 22.

Classe II. $\infty^u M_2^2$ mit einfachen Basispunktgruppen, unter denen kein einziger rational distincter Punkt sein darf. Untertypen entstehen durch complane Lagen von Quadrupeln dieser Punkte oder andererseits Berührungen, die aber theilweise jenen complanen Quadrupeln äquivalent sind.

Classe III. 1. $\infty^5 M_2^3$ durch $M_1^5 p = 2$,

2. $\infty^6 M_2^3$ durch $M_1^4 p = 0$, 2. Art.,

3. $\infty^6 M_2^3$ mit irrational verknüpftem Tripel windschiefer Geraden,†

4, $\infty^4 M_2^3$ mit $M_1^4 p = 1$ mit Berührung in freiem Punkte,

5. M_2^3-Systeme mit 2, 3, 4 irrational verknüpften Doppelpunkten.

---

* Enriques hat $M_2^4(O^3)$ mit 2 Doppelgeraden, was, so viel ich sehe, ebenfalls richtig ist.

† Diese Bemerkung ist ganz wesentlich. Denn sind die Geraden nicht irrational verknüpft, so sind die M_2^3 vom monoidalen Typus, weil sie mittelst einer rationalen Strahlencongruenz auf die Ebene abgebildet werden können. In der That kann man dieses System stets in ein monoidales verwandeln, also von der I. Classe.

6. Wie n. 1. aber mit Zerfallen von M_1^5 in M_1^4 ($p = 1$) mit Bisecante.*

7. oder in zwei irrational verknüpfte M_1^2 und eine gemeinsame Transversalgerade,

8. oder in eine ebene M_1^3 und einen sie zweifach schneidenden Kegelschnitt, aber mit der ausdrücklichen Voraussetzung, dass man auf keiner dieser beiden Curven einen rational distincten Punkt kenne;† die Curven können irrational zerfallen.

9. Wie n. 2, aber mit Zerfallen von M_1^4 in zwei sich einpunktig schneidende M_1^2.

10. M_2^3 aus n. 4., wo M_1^4 in zwei irrat. verkn. M_1^2 oder in ein irrat. verkn. windschiefes Vierseit zerfällt.

11. $\infty^5 M_2^3$ mit M_1^1, M_1^2 windschief und Berührung in einem freien Punkte.

Classe IV. 1. ∞^5-M_2^4 (C_2^2) durch M_1^4 ($p = 1$), die nicht zerfallen darf.

2. ∞^6-M_2^4 (C_2^2) durch M_1^3 ($p = 0$), die nicht zerfallen darf.

3. ∞^7-M_2^4 (C_2^2) durch zwei windschiefe irrat. verkn. Geraden.

4. M_2^4 mit zwei irrat. verkn. Doppelgeraden nebst Curven wie n. 1. 2. 3.

Classe V. ∞^3 M_2^4 (O^2) mit gemeinsamem Berührungsknoten O und gemeinsamer Tangentenebene in O nebst einer Basiscurve 12. O., Schnitt mit M_2^3.

In allen diesen Typen können typische Untersysteme durch Hinzunahme einfacher Basispunkte ausgeschieden werden, wo aber zu beachten ist, dass von n. 13 bis Ende der Classe I., dann in Classe II., in n. 4., 5., 9., 10. von Classe III. und in Classe IV kein rationaler Punkt unter den Basispunkten sein darf.

Auch wird man das Entstehen gemeinsamer Untertypen* in zwei verschiedenen Typen der obigen Aufzählung vermeiden können, indem man die neuen Basispunkte frei im Raume wählt (cf. auch die Anmerkung zu n. 2. der Classe I).

§10.—*Recapitulation unserer Methode. Das fundamentale Transversalentheorem für den R_3.*

Ueberblicken wir rasch nochmals den zurückgelegten Weg. Wir mussten uns zunächst Sicherheit verschaffen über diejenigen ∞^u-Systeme elliptischer Curven, welche auf Flächen existiren können, fanden diese entweder unicursal oder vom Kegelflächentypus, eruirten dann das Characteristische—nämlich die Trans-

* Die Zerlegung in M_1^4 ($p = 0$) mit Trisecante entsteht auch als Untersystem von No. 2, wenn man einen weiteren Basispunkt nicht frei, sondern auf einer Trisecante der M_1^4 von dort wählt.

† In der That wäre der folgende Complex n. 11 äquivalent einem Complexe n. 8, wo aber C_2 einen rationalen Punkt enthielte.

versalzahlen—jener Systeme, welche auf Flächen rational distinct ausgeschnitten werden können, setzten dann—oft nur summarisch—jene Characteristica für die typischen Systeme fest, machten dann nach §2 den Schluss, dass diese Transversalzahlen (und transversalen Curvensysteme) auch auf den M_2^n, welche Systeme elliptischer Curven von jenem Typus tragen, also auf jene typischen Flächen rational distinct abbildbar sind, wieder erscheinen müssen, hierauf jenen Schluss, dass sie auch in den eigentlichen und uneigentlichen Curvencomplexen wieder erscheinen müssen, machten dann nach §2 den weiteren Schluss, dass ausschneidende M_2^n-Systeme existiren müssen, für die wir eben aus ihren Transversaleigenschaften gegen die M_2^n den Rang 1 oder ihr Enthalten eines ∞^3-Systemes vom Range 1 herleiten konnten, womit wir sofort auf den Typus geführt werden.

Das Problem im R_3 ist damit gelöst, aber—und dies ist die Kraft der Transversalenmethode—mit einem Schlage auch das Problem im R_r. Hiezu bedarf es eines wichtigen Theoremes, das aus den bisherigen Discussionen extrahirt werden kann und nun ausgesprochen werden soll.

Um die erhaltenen Typen arithmetisch zu characterisiren, müssten wir für jeden einzelnen die sämmtlichen möglichen Transversalzahlen s und die Dimensionen der zugehörigen Transversalensysteme aufstellen. Aber für unseren Zweck ist hauptsächtlich ein System von Transversalen in's Auge zu fassen. Implicite haben wir bereits für die M_2^2- M_2^3-Typen davon Gebrauch gemacht, dass für die Curvencomplexe, zu denen sie führen, die Ebenen des R_3 ein rational-distinctes System bilden, während für die $M_2^4(O^2)$, $M_2^4(C_2^2)$,-$M_2^6(C_9^2)$-Typen die $M_2^2(O)$, $M_2^2(C_2)$ und $M_2^4(C_9)$ als rational distinctes System verwendet werden. Wird nun von den Typen zu den äquivalenten Curvencomplexen übergegangen, so bleiben diese Eigenschaften erhalten. Ja wir können sogar aussprechen:

THEOREM VIII.—*Für die Curvencomplexe erzeugt von M_2-Systemen vom monoidalen Typus gibt es ein rational distinctes ∞^2-System rationaler Curven, von denen durch jeden Punkt des R_3 nur eine Curve geht und welche die erzeugenden M_2 in nur einem Punkte treffen, aber ausserdem ein rational distinctes ∞^3-M_2-System Ranges* 1, *unter dessen gegenseitigen Schnittcurven jene enthalten sind.*

Für alle übrigen uneigentlichen Complexe und für die eigentlichen Complexe, von denen ein erzeugendes M_2-System den M_2^2-, M_2^3-, $M_2^4(C_2^2)$-Typus hat, gibt es ein rational distinctes ∞^3-M_2-System vom Range 1, *für die mit $M_2^2(C_2^2)$-Typus ausserdem ein rational distinctes ∞^3-M_2-System vom Range* 1, *für die mit $M_2^4(C_2^2)$-Typus ausserdem ein rational distinctes ∞^3-System vom Range* 2, *dagegen für die vom $M_2^4(O^2)$-Typus noch ein rat. dist. ∞^6-M_2-System vom Range* 4.

Bleibt noch zu beweisen, dass für die drei $M_2^4(C_2^2)$-Systeme das System der ∞^3 Ebenen ein rational distinctes Transversalensystem ist. Hiezu muss man sich der M_2^2 bedienen, welche resp. M_1^4, M_1^3, oder das Geradenpaar enthalten. Das System, das die R_2 auf diesen ausschneiden, hat den Rang 2, die Dimension 3; die Systeme, welche die übrigen ∞^3-Systeme vom Range 1, die unter den $\infty^4 M_2^2$ gewählt werden können, ausschneiden, haben stets, wenn man ihnen den Rang 2 verschafft, eine Dimension < 3. Nun sind jene M_2^2 rational distinct für das M_2^4-System, also sind auch die $\infty^3 R_2$ ein rational distinctes System.

Für $M_2^4(O^2)$ ist §13. al. 8. heranzuziehen.

§11.—*Einleitende Theoreme für die eigentlichen Complexe im R_r.*

Uns beschäftigt—bei eigentlichen Complexen—ein ∞^u-System von M_{r-1}, die sich zu je zwei in den Curven des $\infty^{(r-1)(u-r+2)}$-Complexes schneiden. Sie erzeugen also durch den Schnitt von je $r-2$ $\infty^{(r-2)(u-r+3)}$ Flächen, auf denen je ein ∞^{u-r+2}-System elliptischer Curven rational distinct enthalten sein wird. Diese Flächen werden von einem unserer Typen aus §§6, 7 sein und wir unterscheiden danach ebenso viele Classen von ∞^u-Complexen des R_r, entsprechend der Ebene, M_2^2, M_2^3, $M_2^4(C_2^2)$, $M_2^4(O^2)$.

Die M_3, welche innerhalb der M_{r-1}-Systeme erzeugt sind, sind, wie leicht zu sehen, unicursal. Denn nach §4 können wir schliessen, dass es ein ∞^t-System von M_{r-1} geben müsse, welches aus den M_3 die rational distincten ∞^t-M_2-Systeme ausschneiden, deren das Theorem VIII Erwähnung thut. Ist das rational distincte System ein homaloidales, so ist sogar die Complex-M_3 rational distinct auf den R_3 abbildbar. Uebrigens kann man auch das ∞^4-System vom Range 2 benützen und beim 5. Typus das ∞^6-System vom Range 4, und es bedarf dann nur der Festsetzung eines Punktes oder Punktetripels auf R_3, um ein System vom Range 1 auf M_3 festzusetzen, also ist mit Zuhilfenahme jener Irrationalitäten, welche durch das Schneiden mit einer Geraden eingeführt sind, die M_3 (1, 1)-deutig auf einen R_3 abbildbar. Lassen wir einstweilen die $M_2^4(O^2)$-Classe bei Seite, die nur beim ∞^r-M_{r-1}-Systeme vorkommen kann.

Wir haben dann vermöge Theorem VIII. auf den erzeugten M_3 je ein rat. dist. ∞^3-System, das nun von einem rat. dist. ∞^3-M_{r-1}^m-System ausgeschnitten sein muss. Combiniren wir mit diesem ein ∞^{r-3}-System M_{r-1}^n und setzen beide in collineare Beziehungen zu zwei R_{r-1}-Systemen, resp. ∞^3 und ∞^{r-3}, in R_r', so erhalten wir eine birat. Transf., so dass die M_{r-1}^n gleichzeitig in solche übergeführt werden, welche von den R_{r-3} des ∞^3-Systemes in einem rat. dist. Systeme vom Range 1

geschnitten werden. Wird nun mittelst einer räumlich birationalen Transformation übertragen, welche die Systeme vom Range 1 in den $\infty^3 R_{r-3}$ in die R_{r-4}-Systeme in den R_{r-3} durch den festen R_{r-4} des R_r' verwandelt, so erhalten wir das Resultat:

THEOREM IX.—*Alle eigentlichen Complexe elliptischer Curven, die aus ∞^u-M_{r-1}-Systemen, $u > r - 1$, erzeugt sind, sind räumlich birational übertragbar in solche, deren M_{r-1}^n einen festen $(n-1)$-fachen R_{r-4} besitzen, also Monoide mit R_{r-4}-Scheiteln sind.*

Die erzeugten Curven $p = 1$ werden von diesem R_{r-4} auf den R_3 in die Curven eines Complexes transformirt. Wir können nun stets eine birationale Transformation einrichten, welche die R_{r-3} durch den R_{r-4} wieder in R_{r-3} durch den R_{r-4} verwandelt und ausserdem den eben genannten Curvencomplex in seinen Typus.

Somit entsteht ein System von R_{r-4}-Monoiden, deren gegenseitige Schnittcurven von R_{r-4} aus in Curven eines unserer typischen Complexe des R_3 projicirt werden.

Das Problem ist nun wieder so ungeformt, wie wir es in §6. aussprachen. Die Typen des §9 sind in die Abbildungen verschiedener Monoide zu situiren, und es ist zu fragen, durch welche Situirungen *verschiedene* Transversalzahlen des Complexes im R_r erreicht werden können.

Es bleibt noch der Beweis für die in das Theorem IX mit aufgenommene Classe der $M_2^4(O^2)$. Das System der ebenen Schnitte ist nun allerdings auf der einzelnen M_2^4 nicht rational distinct für das ∞^2-System der $C_4\, p = 1$. Ist aber einmal die Curve 12. O. Schnitt mit M_2^3 hinzugenommen, welche Basiscurve der M_2^4 des ∞^2-Systemes ist, dann ist für das ganze ∞^3-System von M_2^4 dennoch das System der $\infty^3 R_2$ ein rational distinctes Transversalensystem. Wenn also ein bestimmtes ∞^r-System M_{r-1} im R_r vorliegt, dessen Schnitt-M_2 den $M_2^4(O^2)$-Typus haben, so werden die M_3 nothwendig, da sie ja nach Einleitung dieses § unicursal sind, ein für das rational distincte ∞^3-M_2-System in ihnen, also auch für sie selbst rational distinctes ∞^3-M_2-System vom Range 1 tragen. Damit haben wir denselben Ausgangspunkt wie vorhin für die anderen Classen gewonnen und schliessen wieder wie für die anderen Classen.

Auch hier kann stets birational so transformirt werden, dass die Projection des Complexes von R_{r-4} aus auf den R_3 der Typus im R_3 wird.

Was nun zuerst die Classe I. aus §9 betrifft, so haben wir diesfalls sogar auf den M_2 ein rat. dist. System vom Range 1; es existiren also $\infty^2\, M_{r-2}$, welche die

M_2 des Complexes in einzelnen Punkten schneiden. Gehen wir genau so vor, wie vorhin, so erhalten wir:

THEOREM X.—*Alle eigentlichen Complexe von Curven $p=1$ im R_r, deren M_2 vom Ebenentypus sind, sind in rational distincter Weise räumlich birational solchen Complexen äquivalent, welche innerhalb eines Systemes von R_{r-3}-Monoiden erzeugt sind.*

Bemerken wir, dass wir im R_3 Systeme von M_2^2, M_2^3, M_2^4 als Typen haben und Systeme von M_2^5, M_2^6 nur bei der Classe I. und nur bei Geltendmachung irrationaler Verknüpfungen unter gewissen Geradengruppen. Wir können nun in der Abbildung die M_2^2-Systeme schon bei M_{r-1}^2-, die M_2^3-Systeme schon bei M_{r-1}^3-, die M_2^4-Systeme schon bei M_{r-1}^4-Systemen zu vollständigen Schnitten ergänzen.

Hiezu ist es nützlich, über die Abbildung der M_{r-1}^2 (R_{r-3}), M_{r-1}^3 (R_{r-4}^2), M_{r-1}^4 (R_{r-3}^3), M_{r-1}^4 (R_{r-4}^3) einiges vorauszuschicken.

1. *Abbildung der M_{r-1}^2 (R_{r-3})* auf den R_{r-1}^b geschieht durch Projection aus einem Punkte O des R_{r-3}. Bild des O wird ein $R_{r-2}\equiv\Omega$, welcher durch den Schnitt-R_{r-4} des R_{r-3} mit R_{r-1}^b geht. Jeder R_{r-2} durch den R_{r-3} schneidet M_{r-1}^2 in einem R_{r-3}, der den ersten in R_{r-4} trifft. Dieser gibt es ∞^2, die also einen R_{r-6} gemeinsam haben. M_{r-1}^2 enthält diesen R_{r-6} zweifach, ist also ein R_{r-6}-Kegel. Bilder der Schnitte von M_{r-1}^2 mit allen R_{r-1} des R_r sind M_{r-2}^2 durch eine feste M_{r-3}^2 in Ω, die O_ω heissen soll. O_ω enthält den R_{r-4}^s einfach. Bilder der Schnitte von M_{r-1}^2 mit M_{r-1}^2 durch O sind M_{r-2}^3 (O_ω). Diese M_{r-2}^3 besitzen also im R_{r-4} eine Doppel-M_{r-7}^8, welche aber variabel ist. Bilder der Schnitte mit M_{r-1}^2 durch R_{r-3} sind M_{r-2}^3-$(R_{r-4}^s)^2$, welche O_ω einfach enthalten. Wenn diese M_{r-1}^2 in O die gegebene M_{r-1}^2 berühren, so haben die Schnitte zu Bildern M_{r-2}^2 (R_{r-4}), welche O_ω nicht enthalten und also O_ω ausser im R_{r-4} noch in einer M_{r-4}^3 schneiden. Wenn diese M_{r-2}^2 (R_{r-4}) die Ω längs des R_{r-4} berühren, so tritt das in n. 1 der Aufstellung des Theoremes X. beschriebene Verhalten ein.

2. *Abbildung der M_{r-1}^3 (R_{r-3}^2)* auf den R_{r-1}^2 geschieht durch Projection aus einem Punkte O des R_{r-3}. Bild des O wird eine $M_{r-2}^2\equiv\Omega$, welche durch den Schnitt-R_{r-4} des R_{r-3}^2 mit R_{r-1}^b doppelt geht.—Jeder R_{r-2} durch den R_{r-3} schneidet M_{r-1}^3 in einem R_{r-3}, der den ersten im R_{r-4} trifft. Dieser gibt es ∞^2, die also einen R_{r-6} gemeinsam haben, der für M_{r-1}^2 dreifach ist, also ist M_{r-1}^3 von $r=6$ ab im R_{r-6}-Kegel. Im linearen M_{r-1}^3-Systeme variirt der Scheitel R_{r-6}.—Bilder der Schnitte von M_{r-1}^3 mit allen R_{r-1} des R_r sind M_{r-2}^3 durch eine

feste M^6_{r-3} in Ω, die O_ω heisse. O_ω enthält R_{r-4} 4-fach und ist der Schnitt der von O aus in die M^3_{r-1}gehen den Geraden auf dem R^b_{r-1}. Bilder der Schnitte mit M^3_{r-1} sind M^3_{r-2} durch O^3_ω, der Schnitte mit $M^3_{r-1}(O^2)$ sind M^5_{r-2} durch O_ω und mit R^3_{r-4}, der Schnitte mit $M^3_{r-1}(R^2_{r-3})$, sind $M^5_{r-2}(R^4_{r-2})$ durch O_ω, der Schnitte mit $M^3_{r-1}(R^2_{r-3})$ welche M^2_{r-1} in O berühren, sind $M^3_{r-2}(R^2_{r-4})$, welche O_ω nicht enthalten müssen. Der Ausdruck, "berühren in O" bedeutet, dass beide M^3_{r-1} in O dieselben R_2 gestatten, in denen die Schnittcurve $M^3_1(O^2)$ in O eine Spitze besitzt. Die Spitzentangenten schneiden auf Ω; zu ihnen gehören specieller Weise die Geraden von O, welche in O_ω schneiden. Jede Ebene durch O schneidet die beiden M^3_{r-1} in zwei $M^3_1(O^2)$ mit übereinstimmenden Doppelpunktstangenten.

Im Allgemeinen gibt es für die beiden $M^3_{r-1}(R^2_{r-3})$ einen biquadratischen Kegel von gemeinsamen Tangenten—R_{r-2} durch R_{r-3}. Wenn aber die $M^3_{r-2}(R^2_{r-4})$—die Schnittbilder—die Ω längs des R_{r-4} berühren, dann reducirt sich der biquadratische Kegel auf einen doppelt gezählten quadratischen. Um eine Vorstellung von diesem Verhalten zu geben, will ich die $M^3_2(R^2_1)$ des R_3 auf die Ebene abbilden. Die Schnitte mit anderen $M^3_2(R^2_1)$ bilden sich als $M^5_1(R^4_0)$ ab und wenn sich die zwei Bildgeraden von O absondern, noch durch $M^3_1(R^2_0)$. Diese sind Bilder von M^5_1, welche O^2 enthalten und R_1 noch zweimal variabel und, wenn die $M^3_1(R^2_0)$ feste Doppelpunktstangenten hat, mit festen Tangentenebenen durch R_1 treffen und aber, wenn $M^3_1(R^2_0)$ jene zwei Bildgeraden berühren, diese variabeln Schnittpunkte mit R_1 in O selbst hineinziehen. Es fallen also von den 4 durch R_1 gehenden Tangentenebenen der Schnittcurve M^5_1 je zwei in eine zusammen, nämlich in die beiden Tangentenebenen des Punktes O. So ist es also—mit entsprechender Aenderung der Dimension—zu verstehen, wenn im §12 in der Aufzählung steht: "mit einem doppelt gezählten quadratischen Kegel gemeinsamer Berührungs-R_{r-2}."

3. *Abbildung der* $M^4_{r-1}(R^3_{r-4})$ auf den R^b_{r-1} geschieht wieder durch Projection aus einem Punkte O der R_{r-4}: Bild von O wird eine $M^3_{r-2}(R^s_{r-5})^3 \equiv \Omega$, wo R_{r-5} der Schnitt des R_{r-4} mit R^b_{r-1} ist. Jeder R_{r-3} durch den R_{r-n} schneidet M^3_{r-1} in einem R_{r-4}, der den ersten in einem R_{r-5} trifft. Dieser gibt es ∞^3, die also einem R_{r-8} gemeinsam haben, der für M^4_{r-1} einfach ist, also ist M^4_{r-1} von $r=8$ ab ein R_{r-8}-Kegel. Im linearen M^4_{r-1}-Systeme variirt aber dieser Scheitel R_{r-8}.

Bilder der Schnitte von M^4_{r-1} mit allen R_{r-1} des R_r sind $M^4_{r-2}(R^3_{r-5})$ durch eine feste M^{12}_{r-3} in Ω, die wieder O_ω heisse. O_ω enthält R_{r-5} 9-fach und ist der

Schnitt der von O aus in die M_{r-1}^4 gehenden Geraden auf dem R_{r-1}^b. Bilder der Schnitte mit M_{r-1}^4 sind M_{r-2}^{16} durch O_ω^4, der Schnitt mit $M_{r-1}^4(O^3)$ sind M_{r-2}^7 durch O_ω und mit R_{r-1}^3, mit $M_{r-2}^4(R_{r-4}^3)$ sind $M_{r-2}^7(R_{r-5}^6)$ durch O_ω und wenn in O Berührung stattfinden soll, also die Tangentenebenen der beiden M_{r-9}^4 in O übereinstimmen sollen, werden die Schnittbilder $M_{r-2}^4(R_{r-5}^3)$ sein. Zwei solche M_{r-1}^4 werden von jeder Ebene durch O in zwei Curven $M_1^4(O^3)$ geschnitten, die im dreifachen Punkte übereinstimmende Tangenten besitzen. Wenn aber die letzterwähnten M_{r-2}^4 die Ω längs des R_{r-5} berühren, so tritt ein ähnliches Verhalten wie bei $M_{r-1}^3(R_{r-4}^2)$ ein und die Beschreibung in Classe IV und V des §12 ist daher in derselben Weise durch die Abbildung zu commentiren.

§12.— *Ueber die Aufstellung der Typen im R_r nach meiner Methode des* §4.

M_{r-1}^2. Gehen wir zunächst zum R_4 über und suchen ein vollständiges Schnittsystem von $M_3^2(R_1)$ zu ergänzen, ausgehend von einem typischen Complexe des §9. Nur die Systeme von M_2^2 lassen sich derart situiren und hierzu muss Ω doppelt abgerechnet werden, was auf $M_3^2(R_1)$ führt, die sich in einem Punkte O_1 von (R_1) berühren. Von hier zum R_5 übergehend verlegen wir diesen Punkt O_1 des Bildsystemes auf O_ω, lassen die feste Berührungsebene mit der von O_ω coincidiren und verlegen auch den festen Punkt O aus dem R_3 her auf O_ω und können nicht O gleichzeitig in eine Gerade aus O verlegen, da sonst eine Gerade sich von den Schnittcurven absondern würde. Setzen wir so weiter bis zum R_r fort, so erhalten wir die in n. 1, Classe I. hier folgend beschriebene Berührung.

M_{r-1}^3. Indem wieder mit R_4 begonnen werde, versuchen wir, ein System von $M_3^3(R_1^2)$ herzustellen, dessen einzelne M_3^3 durch die Abbildung n. 2 aus §11 den Typus 2. der Classe I. aus §9 liefere. Von den $M_2^5(R_0^4)$ können wir die $M_2^3(R_0^2)$ des Typus § 9 absondern und es bleibt als Ergänzung $M_2^3(R_0^2)$. Da die M_2^3 des genannten Typus nicht durch O_ω hindurch gehen können, so muss Ω selbst als Ergänzung genommen werden. Nehmen wir überdies den festen Osculationskegel des Typus als mit dem Kegel Ω übereinstimmend, so handelt es sich nun, die Lage des $M_3^3(R_1^2)$-Systemes im R_4 zu definiren, dessen Schnitte mit der gegebenen M_3^3 deren Typus als Bild liefern. Wir sahen aber in der Abbildung n. 2., dass in diesem Falle der sonst biquadratische Kegel der gemeinsamen Tangentenebenen um R_1 in einen doppelt gezählten quadratischen ausartet. Da nun der Osculationskegel von Ω in R_0 stets auch im R_6, ... bis R_r quadratisch ist, so können wir stets den Osculationskegel aus dem Typus im R_{r-1} mit dem von Ω zusammenfallen lassen und erhalten stets einen Typus gleicher Art.

Den Typen 3. bis 7. der Classe entsprechende Typen finden wir im R_4 bis R_r dadurch—ebenso wie wir sie im R_3 entdeckten—dass wir die M^2_{r-2}, durch welche wir die M^3_{r-2} zum vollständigen Schnittbilde M^5_{r-2} ergänzen müssen, einmal mit Ω zusammenfallen lassen, wo es dann noch für die Transversalzahlen im R_r, also für die Möglichkeit, eine birationale Aequivalenz wie in §4 einzurichten, also auch für die Natur des Complexes indifferent ist, ob wir die Basis des Bildcomplexes in die Ω verlegen oder frei im R_r lassen, ein anderes Mal aber die Ergänzungs-M^2_{r-2} von Ω verschieden nehmen, zu diesem Zwecke aber die Basis des Bildcomplexes im R_{r-1} auf Ω selbst und zwar gerade als Bestandtheil von O_ω wählen müssen, damit der für die vollständigen Schnitte geforderte Durchgang durch O_ω geleistet sei. Durch den restlichen Theil von O_ω geht die Ergänzungs M^2_{r-2}, der als Bild denn auf M^3_{r-1} im R_r eine Original-M_{r-2} entspricht, welche eben in den Fällen n. 4 bis 7. bezüglich eine M^3_{r-2}, M^4_{r-2}, M^5_{r-2}, M^6_{r-2} ist. Ebenso verhält es sich mit den übrigen Typen der Classe I. aus §9.

Bei der Classe III. tritt von R_4 angefangen eine grosse Verschiedenheit gegenüber dem R_3 auf, die ihren Ursprung wiederum in der Ergänzungsmannigfaltigkeit zu dem den Bildcomplex erzeugenden Systeme hat und die ich erläutern muss. Wir haben es im R_4 mit $M^3_3(R^2_0)$ zu thun. In Abbildung n. 3. aus §13 haben wir als O_ω eine Curve $M^6_1 p = 4$ und müssen im Bild-R_3 die Complexe der Classe III. aus §9 situiren. Der erste hat die Basis $M^5_1 p = 2$; es ist auch thatsächlich möglich, eine M^3_3 zu construiren, wo O_ω sich in $C_5 p = 2$ und eine Trisecante spaltet. Durch diese Gerade wird die Ergänzungs-M^2_2 hindurchgehen müssen und wir können sie nun 1. mit Ω coincidiren lassen oder sie 2. davon verschieden nehmen, sodass zwei verschiedene Complexe im R_4 entstehen:

1. $M^3_3(R^2_0)$ mit fester Osculation im R_0 und einem im Osculationskegel enthaltenen $M^5_2(R^5_0)$.

2. $M^3_3(R^2_0)$ mit einer Basis-$M^5_2(R_0)$.

Gehen wir nun von n. 1. zu R_5 über, so werden wir im Bild-R_4 diese $M^3_3(R^2_0)$ so verlegen, dass der Doppelpunkt mit R_0 coincidirt und dass ausserdem der Osculationskegel den wir oben eruirt haben, mit dem Osculationskegel von Ω, welche noch Abbildung 2. des §11 $M^2_2(R^2_0)$ ist, coincidirt. Wir bekommen so von R_5 bis R_r stets nur denselben Typus (bis auf die Dimension). Gehen wir aber von n. 2. ab weiter, so haben wir, da dieser Typus bis auf die Dimension genau mit n. 1 der Classe III. im R_3 übereinstimmt, allerdings neuerdings die Möglichkeit zweier Situirungen. Aber die eine derselben liefert immer wieder nur den oben gefundenen Typus, die andere eben den dem 2. im R_1 entsprechenden

Typus. So verhält es sich beinahe mit jedem Typus der Classe III. und wir haben vom R_4 ab die doppelte Anzahl Typen jener im R_3, mit Ausnahme nur des Typus mit 3 Geraden. Denn dann ist der Rest von O_ω wieder ein windschiefes Geradentripel, und da die Ergänzung dieses enthalten muss, fällt sie *nothwendig* mit Ω zusammen.

Classe III liefert aber noch eine weitere neue Besonderheit gegenüber dem R_3. Nämlich die in R_3 scheinbar nebensächlichen Degenerationen der Basiscurven führen hier dadurch, dass man nur einen Theil derselben in die O_ω eingehen lässt, den anderen ausserhalb nimmt, zur Möglichkeit, neue Ergänzungs-M_2 verschieden von Ω zu verwenden. So sind einige im R_r neue Typen der Classe III entstanden.

Classe IV. bietet gegen Classe III. einige Eigenthümlichkeiten. Gemäss Abbildung n. 3. aus §11 haben wir für R_4 die $M_2^4(C_2^2)$ des Bild-R_3 zu ergänzen zu M_2^7. Dies kann in zwei Arten geschehen. Wir verlegen C_2 und resp. M_1^4, M_1^3, $M_1^1 + M_1^1$ in Ω, indem wir sie sogar als Bestandtheil von O_ω wählen, welche der Schnitt 12. O. einer M_2^2 und einer M_2^3 sein muss. An einer Hilfsabbildung von M_2^3 erprobt man, dass der Resttheil, der von O_ω nach Wegnahme von $C_2 + M_1^1 + M_1^1$ bleibt, nicht mehr das Hindurchgehen einer zweiten M_2^3 gestattet. Nach Wegnahme von $C_2 + M_1^4$ oder $C_2 + M_1^3$ bleibt dagegen M_1^6 oder M_1^7, durch welche ausser Ω eine zweite M_2^3 als die nothwendige Ergänzungsfläche gehen kann. Da die Bild-M_2^4 die C_2 doppelt enthalten, müssen wir einen Kegel $M_2^2(O^2)$ hinzufügen,* der C_2 enthält, und aus der Ergänzung entsteht resp. eine $M_2^6(O^3)$ oder $M_2^5(O^2)$, welche die Eigenschaft besitzt, in einer M_2^3 zu sein. Für Ω als Ergänzung entsteht dagegen der feste Osculationskegel in O und ein Berührungskegel $M_2^2(O^2)$ selbst $M_2^4(O^4)$ oder $M_2^3(O^3)$ oder $M_2^1(O) + M_2^1(O)'$, welche alle in Osculationskegel enthalten sind.

Weitergehend zum R_5 haben wir also im Bildraume R_4^b einen der beiden im R_4 enthaltenen typischen Complexe zu situiren. Für die drei Typen mit festem Osculationskegel lassen wir überdies die drei Basiskegel $M_2^2(R_0^2) + M_2^4(R_0^4)$ oder $M_2^2(R_0^2) + M_2^3(R_0^3)$ oder $M_2^2(R_0^2) + R_1(R_0) + R_1^1(R_0)$ in die O_ω, welche jetzt eine $M_2^{12}(R_0^9)$ Schnitt vom $\Omega \equiv M_3^3$ und M_3^4 ist, als Theile eingehen. In Folge davon wird der Osculationskegel aller Bild M_3 nothwendig durch diese Basiskegel hindurchgehen und nichts hindert, ihn mit dem Osculationskegel Ω selbst coin-

* Dieses Verfahren drückt sich arithmetisch durch die Thatsache aus, dass man für einen Punkt A, der a-fach gezählt ist, den Singularitätencomplex $n = 0, -a, 0 \ldots . 0$, wo die letzten Nullen sich auf die etwa weiter vorhandenen Grundpunkte beziehen. Cf. meine Arbeit in Cr. J., CXIV.

cidiren zu lassen. Wir bekommen damit die in n. 3. des §11 erwähnte Berührungsart, wenn wir Ω als Ergänzung nehmen. Aber wie im R_4 bekommen wir aus den beiden ersten die Möglichkeit, die Ergänzungs-M_3^3 durch den Resttheil von O_ω verschieden von Ω situiren. Diese liefert dann im R_5 einen Typus, wo nur der der C_2 entstammende M_3^2-Kegel erscheint und ausserdem eine $M_3^6(R_1)$ oder $M_3^5(R_1)$.

Es bleiben noch zwei Bilder zu verwenden, die beiden letzten Typen aus dem R_4. Da dort die Basis-M_2^6,-M_2^5 in einer M_3^3 enthalten waren, können wir sie in O_ω als Theile eingehen lassen. Dagegen ist es nicht möglich, gleichzeitig den M_2^2-Kegel in dieselbe O_ω mit aufzunehmen, aber wir können ihn so situiren, das ihm auf den M_4^4 des R_5 nicht ein Kegel 4. O., sondern nur ein Kegel 2. O. entspricht (Typen n. 6., 7. der Classe IV). Die Ergänzungs-M_3^3 durch die restlichen M_2^6, M_2^7 liefert im R_5 wieder M_3^6, M_3^5 derselben Art bis auf die Dimension und so entsteht also eine ganze Reihe von Typen bis zum R_r, welche in der Tafel unter Cl. IV erscheint.

Wird aber mit jenen zwei letzten Bildern aus dem R_4 doch noch die Ergänzungs-M_3^3 mit Ω identisch gemacht, so entsteht zunächst im R_5 ein System von M_4^4 mit fester Osculation nicht nur in O sondern so, dass die gemeinsamen Tangentenebenen einen doppelt gezählten quadratischen Kegel bilden, und einen gemeinsamen Kegel M_3^6, M_3^5 und ausserdem wiederum dem Basiskegel 2. O. M_2^2. Setzt man von diesem Typus im Bild-R_5 angefangen dieses Verfahren bis zum R_r fort, so erhält man immer wieder einen Typus derselben Art oder einen Typus der schon vorhin erhaltenen beiden Arten.

Indem ich nun die soeben in einzelnen Fällen angedeutete Anwendung meiner Methode durchgeführt denke, erhalte ich folgendes Theorem, das ich jedoch mit dem Vorbehalte hier ausspreche, dass sich bei späterer Discussion eine Subdivision der Typen herausstellen könne.

THEOREM XI.—*Alle eigentlichen Complexe elliptischer Curven im R_r, welche durch ∞^u-M_{r-1}-Systeme, $u > r-1$, erzeugt sind, können in rational distincter Art räumlich birational äquivalent einem der folgenden Typen gemacht werden:*

Classe I. 1. $\infty^{r+\sigma}M_{r-1}^2$, welche einen rational distincten R_{r-3} gemeinsam haben, und mit einem doppelt zu zählenden R_{r-1} von gemeinsamen Berührungs-R_{r-2} durch einen R_{r-4} im R_{r-3} nebst ausserdem einer Anzahl einfacher Basispunkte, die frei im R_r gewählt werden können.

2. $\infty^{r-\alpha+\gamma}M_{r-1}^3$ (R_{r-3}^2), welche längs dieses R_{r-3} gemeinsame Tangenten-R_{r-2} in einem doppelt gezählten quadratischen Kegel besitzen und aus-

serdem $\alpha = 0, 1, \ldots 6$ gemeinsame Punkte, die verschiedentlich irrational verknüpft sein können.

3. $\infty^{r+4} M_{r-1}^2 (R_{r-3}^2)$ mit gemeinsamer $M_{r-2}^3 (R_{r-3})$.

4. $\infty^{r+3} M_{r-1}^3 (R_{r-3}^2)$ mit gemeinsamer $M_{r-2}^4 (R_{r-3}^2)$.

5. $\infty^{r+2} M_{r-1}^3 (R_{r-3}^2)$ mit gemeinsamer $M_{r-2}^5 (R_{r-3}^3)$.

6. $\infty^{r+1} M_{r-1}^3 (R_{r-3}^2)$ mit gemeinsamer $M_{r-2}^6 (R_{r-3}^4)$.

7. $\infty^{r+1} M_{r-1}^3 (R_{r-3}^2)$ mit gemeinsamem Tangentenkegel wie in n. 2. mit 6 einfachen freien Punkten, welche irrational verknüpft sind und nicht in einem quadratischen Kegel mit R_{r-3} als Scheitel enthalten sind.

8. $\infty^{r+1} M_{r-1}^3 (R_{r-3}^2)$ mit derselben Berührung um den R_{r-3} wie in n. 2. und mit mehr als zwei einfachen Punkten, unter denen aber auch Tripel, die mit R_{r-3} in einem R_{r-1} sind, oder Berührungen vorhanden sein können.

9. $\infty^{r+1} M_{r-1}^3 (R_{r-3}^2)$ mit gemeinsamem Osculationsraume R_{r-1} durch den R_{r-3} und einer gemeinsamen $M_{r-2}^3 (R_{r-3}^2)$, die aber nicht in jenem R_{r-1} enthalten sind.

10. $\infty^{r+1} M_{r-1}^3 (R_{r-3}^2)$ mit zwei $M_{r-2}^3 (R_{r-3}^2)$,* die in zwei R_{r-1} durch R_{r-3} enthalten sind und deren Osculationskegel in einen und denselben doppelt gezählten R_{r-2} ausgeartet ist.

11. $\infty^{r+1} M_{r-1}^4 (R_{r-3}^3)$ mit gemeinsamer $M_{r-2}^{10} (R_{r-3}^6)$.

12. $\infty^{r} M_{r-1}^4 (R_{r-3}^3)$ mit gemeinsamer $M_{r-2}^{11} (R_{r-3}^9)$.

[Hieher gehört das ∞^{r-1}-System $M_{r-1}^4 (R_{r-3}^3)$ mit gemeinsamer $M_{r-2}^{12} (R_{r-3}^{10})$].

13. $\infty^{r+4} M_{r-1}^3 (R_{r-3}^2)$ mit zwei irrational verknüpften R_{r-2} durch R_{r-3} und einem R_{r-2}, der nicht durch den R_{r-3} geht.

14. $\infty^{r+2} M_{r-1}^3 (R_{r-3}^2)$ mit zwei R_{r-2} durch R_{r-3} und $M_{r-2}^3 (R_{r-3}^2)$.

15. $\infty^{r+\sigma} M_{r-1}^4 (R_{r-3}^3)$ mit der zu n. 2. analogen Berührung um R_{r-3} längs eines doppelt gezählten cubischen Kegels und mit Berührung längs zweier R_{r-2} darunter.

16. $\infty^{r+4} M_{r-1}^4 (R_{r-3}^3)$ wie 15. nebst fester $M_{r-2}^6 (R_{r-3})$.

17. $\infty^{r+3} M_{r-1}^4 (R_{r-3}^3)$ wie 15. nebst fester $M_{r-2}^5 (R_{r-3}^3)$ und irrationaler Verknüpfung der R_{r-2}.

18. $\infty^{r+2} M_{r-1}^4 (R_{r-3}^3)$ mit zwei irrational verknüpften R_{r-2} durch R_{r-3} und $M_{r-2}^6 (R_{r-3}^3)$.

19. $\infty^{r+1} M_{r-1}^4 (R_{r-3}^3)$ mit zwei R_{r-2} durch R_{r-3} und $M_{r-2}^7 (R_{r-3}^4)$.

20. $\infty^{r} M_{r-1}^4 (R_{r-3}^3)$ mit zwei R_{r-2} durch R_{r-3} und $M_{r-2}^8 (R_{r-3}^5)$.

---

* Diese M_{r-2}^3 sind jedoch sehr specieller, näher zu beschreibender Natur.

21. $\infty^{r+3} M^4_{r-1}(R^3_{r-3})$ mit 5 irrational verknüpften R_{r-2} durch den R_{r-3} und $M^4_{r-2}(R^2_{r-3})$.

22. $\infty^{r+3} M^5_{r-1}(R^4_{r-3})$ mit der zu n. 2. analogen Berührung um R_{r-3} längs eines doppelt gezählten biquadratischen Kegels und 5 irrational verknüpften R_{r-2} durch den R_{r-3}.

23. $\infty^{r+1} M^5_{r-1}(R^4_{r-3})$ mit $M^4_{r-2}(R_{r-3})$ und Berührung längs dreier, Osculation längs zweier je irrational verknüpften R_{r-2} durch den R_{r-3}.

24. $\infty^{r+3} M^5_{r-1}(R^4_{r-3})$ mit $M^{11}_{r-2}(R^5_{r-3})$ und 5 irrational verknüpften R_{r-2} durch den R_{r-3}.

25. $\infty^{r+2} M^5_{r-1}(R^4_{r-3})$ mit $M^3_{r-2}(R_{r-3})$ und mit R_{r-3} wie in 24.

26. $\infty^{r+4} M^6_{r-1}(R^5_{r-3})$ mit R_{r-2} wie in 24.

Classe II. $\infty^u M^2_{r-1}$ mit Berührung wie in Classe I. n. 1. aber ohne den gemeinsamen R_{r-3} und Gruppen gemeinsamer Punkte, unter denen aber keiner rational gegeben sein darf.

Classe III. 1. $\infty^{r+3} M^3_{r-1}(R^2_{r-4})$ mit gemeinsamem Tangenten-R_{r-3}-Kegel welcher ein doppelt gezählter quadratischer ist, und einem unter diesem enthaltenen Kegel $M^5_{r-2}(R^5_{r-4})$.

2. $\infty^{r+3} M^3_{r-1}(R^2_{r-4})$ mit einer Basis $M^5_{r-2}(R^3_{r-4})$.

3. $\infty^{r+4} M^3_{r-1}(R^2_{r-4})$ mit Berührung wie in n. 1. und einem Basiskegel $M^4_{r-2}(R^4_{r-4})\, p = 0$, 2. Art.

4. $\infty^{r+4} M^3_{r-1}(R^2_{r-4})$ mit einer Basis-$M^4_{r-2}(R^2_{r-4}),\, p = 0$, 2. Art.

5. $\infty^{r+4} M^3_{r-1}(R^2_{r-4})$ mit Berührung wie in n. 1. und drei gemeinsamen R_{r-2} durch den R_{r-4}.

6. $\infty^{r+3} M^3_{r-1}(R^2_{r-4})$ mit Berührung wie in n. 1. und gemeinsamen Kegel $M^2_{r-2}(R^2_{r-4})$, gemeinsamen $R_{r-2}(R_{r-4})$, der jenen nicht anormal schneidet und Berührung längs gemeinsamem R_{r-3} durch R_{r-4}.

7. $\infty^{r+3} M^3_{r-1}(R^2_{r-4})$ mit Berührung wie in n. 1. und gemeinsamem Kegel $M^4_{r-2}(R^4_{r-4})\, p = 1$ und Berührung längs gemeinsamem R_{r-3} durch R_{r-4}.

8. $\infty^u M^3_{r-1}(R^2_{r-4})$-Systeme mit Berührung wie in n. 1. und gemeinsamen Berührungs-R_3 in 2, 3, 4 irrational verknüpften freien Punkten der R_r.

9. Degenerationen, welche aus n. 1. durch Zerfallen der M^5_{r-2} in M^4_{r-2} mit R_{r-2}, oder

10. in zwei irrational verknüpfte M^2_{r-2} und einen beide anormal schneidende R_{r-2} oder

11. eine in einem $R_{r-1}(R_{r-4})$ enthaltene M^3_{r-2} und eine in einer M^2_{r-3} schneidende M^2_{r-2} entstehen, jedoch mit dem Vorbehalte, dass man auf keiner

dieser Mannigfaltigkeiten einen rationalen Punkt kenne. Bei **11.** muss der Tangentenkegel um den R_{r-4} in zwei R_{r-1} zerfallen.

12. Degeneration, welche aus n. 3. durch Zerfallen von M^4_{r-2} in zwei sich in einem R_{r-3} schneidende M^2_{r-2} entsteht.

13. Degeneration von n. 6., wo M^2_{r-2} in ein rational verknüpftes R_{r-2}-Paar zerfällt.

14. Degeneration von n. 7., wo M^4_{r-2} in zwei irrational verknüpfte M^2_{r-2} oder ein irrational verknüpftes Quadrupel von R_{r-2}, die aber keinen gemeinsamen R_{r-3} bestimmen, zerfällt.

15. $\infty^{r+3} M^3_{r-1}(R^2_{r-4})$ mit R_1, M^2_{r-2} und gemeinsamen Berührung-R_2 in einem freien Punkte des R_r (parallel mit n. 6).

16. $\infty^{r+3} M^3_{r-1}(R^2_{r-4})$ mit zwei sich in einem R_0 schneidenden Variatäten M^2_1, M^2_{r-2} (parallel mit n. 10).

17. $\infty^{r+3} M^3_{r-1}(R^2_{r-4})$ mit $M^4_{r-2}(R^2_{r-4})$ mit einer diese zweimal schneidenden Geraden.

18. System wie n. **17.**, ausser dass jene M^4_{r-2} in zwei $M^2_{r-2}(R_{r-4})$ zerfällt (parallel mit 10.).

19. $\infty^{r+3} M^3_{r-1}(R^2_{r-4})$ mit gemeinsamem Tangenten-R_{r-3} in einem R_{r-1} um den R_{r-4} und im R_{r-1} einer festen M^2_{r-2} und ausserhalb des R_{r-1} einer festen $M^3_{r-2}(R^2_{r-4})$.

Classe IV. 1. $\infty^{r+2} M^4_{r-1}(R^2_{r-4})$ mit gemeinsamer Berührung längs eines doppelt gezählten cubischen Kegels um den R_{r-4} und mit einer Basis-$M^4_{r-2}(R^4_{r-4})\, p = 1$, die nicht zerfallen darf, und welche aus Tangenten-R_{r-3} um den R_{r-4} besteht, nebst Berührung längs einer Basis-$M^2_{r-2}(R^2_{r-4})$.

2. $\infty^{r+3} M^4_{r-1}(R^3_{r-4})$ mit Berührung wie in n. **1.** und einer Basis-$M^3_{r-2}(R^3_{r-4})\, p = 0$, die nicht zerfallen darf, und mit Berührung längs einer Basis-$M^2_{r-2}(R^2_{r-4})$.

3. $\infty^{r+4} M^4_{r-1}(R^3_{r-4})$ mit Berührung wie in **n.** 1. und zwei Basis-$R_{r-2}(R_{r-4})$, die sich nicht normal schneiden, und mit Berührung längs einer Basis-$M^2_{r-2}(R^2_{r-4})$.

4, $\infty^{r+2} M^4_{r-1}(R^3_{r-4})$ mit gemeinsamer $M^2_{r-2}(R^2_{r-4})$ und einer Basis-$M^6_{r-2}(R^3_{r-4})$.

5. $\infty^{r+3} M^4_{r-1}(R^3_{r-4})$ mit gemeinsamer $M^2_{r-2}(R^2_{r-4})$ und einer Basis-$M^5_{r-2}(R^2_{r-4})$.

6. $\infty^{r+3} M^4_{r-1}(R^3_{r-4})$ mit Berührung wie in n. **1.**, einer Basis-M^6_{r-2} und einer gemeinsamen M^2_2.

7. $\infty^{r+2} M^4_{r-1}(R^3_{r-4})$ mit Berührung wie in n. 1., mit einer Basis-M^6_{r-2} und einer gemeinsamen M^2_2.

8. Degenerationen, welche aus n. 1.–7. entstehen, indem die vorkommenden quadratischen Kegel in rational verknüpfte Paare linearer Räume zerfallen.

Classe V. $\infty^r M^4_{r-1}(R^3_{r-4})$ mit einer Selbstberührung in einem R_{r-4} und einem gemeinsamen Basiskegel M_{r-2} 12. Ordnung.

Hiezu kommen typische Untersysteme, welche aus den vorhergehenden durch Festsetzung gemeinsamer einfacher freier Punkte des R_r entstehen, wobei aber zu beachten ist, dass, um irreductible Systeme zu erhalten, unter diesen Punktgruppen in Classe I. von 13. bis 25., in Classe II und in Classe IV. kein einziger rational gegebener Punkt sein darf. Ob noch weitere Einschränkungen zu machen sind, kann ich derzeit nicht entscheiden, da hiezu eine Discussion aller verwendbaren Raumtranspositionen nöthig wäre.

§13.—*Die uneigentlichen Complexe elliptischer Curven im R_r.*

Jeden linearen Complex von der Art der in dieser Arbeit untersuchten, also in Bezug auf Dimension vollständigen, sei er eigentlich oder uneigentlich, können wir durch $r-1$ lineare M_{r-1}-Systeme von verschiedenen oder gleichen Dimensionen erzeugen.* Von diesen erzeugen $r-2$ einen vollen M_2-Complex. Wählen wir sie so, dass das $(r-1)$. System eine Dimension >1 hat, was möglich sein wird, da, wenn alle $r-1$ M_{r-1}-Systeme gleiche Dimension 1 hätten, der Complex eigentlich wäre und durch ein einziges M_{r-1}-System erzeugt werden könnte, so wird auf jeder M_2 des genannten Complexes ein mindestens ∞^2-System vorhanden sein; also werden die M_2 abbildbar sein; ja, da der Complex rational distinct gegeben ist, werden diese Curvensysteme auf den M_2 rational distinct und die M_2 werden von einem der Typen des Theoremes VII. sein. Nur wenn M_2 den Kegelflächentypus hätte, müssten wir zuerst bedenken, dass die sämmtlichen Schaaren rationaler Curven in einem einzigen ∞^{r-1}-Systeme enthalten sein müssen, wo von wir auf das Strahlbündel und damit auf den Typus des §3 kommen. Setzen wir also voraus, dass es nicht möglich sei, $r-2$ unter den $r-1$ Systemen so auszuwählen, dass sie M_2 vom Kegelflächentypus erzeugen.

Dann wählen wir $r-3$ unter den Systemen. Sie erzeugen einen M_3-Complex und diese M_3 werden nach den in §11 gemachten Schlusse wieder unicursal

* American Journal of Mathematics, vol. XXIII, p. 1.

sein, werden also wegen des Complexes elliptischer Curven, den sie enthalten, ein rational-distinctes M_2-System vom Range 1 tragen, das dann aus allen simultan durch ein M_{r-3}-System ausgeschnitten werden muss. Indem wir aus den $r-3$ Systemen durch Festzetzung rational distincter Punkte Untersysteme auswählen, können wir wie in §11 auf jenes $\infty^3 M_{r-s}$-System eine birationale Transformation gründen, die es in ein ∞^3-System von R_{r-3} überführt und weiterhin die $r-3\, M_{r-1}$-Systeme in R_{r-4}-Monoide (wie in §11).

THEOREM XII.—*Jeder uneigentliche Complex elliptischer Curven des R_r, dessen erzeugte M_2 nicht den Kegelflächentypus haben, ist in rational distincter Weise räumlich birational äquivalent einem Complexe von Curven, welche als Schnitt von $r-3$ Systemen von R_{r-4}-Monoiden und zwei Systemen von R_{r-4}-Kegeln erzeugt wird, welche sämmtlich denselben Scheitel-R_{r-4} haben. Die beiden Kegelsysteme bestimmen sich gemäss den beiden erzeugenden M_2-Systemen im R_3.*

Wir können endlich aus allen bisher erhaltenen Resultaten die wichtige Folgerung ziehen:

THEOREM XIII.—*Für jeden eigentlichen oder uneigentlichen linearen Complex elliptischer Curven im R_r, ausgenommen den eigentlichen ∞^{r-1}-Complex, lässt sich in rational distincter Weise ein lineares ∞^r-System Transversal-M_{r-1}, das den Rang 1 hat, angeben.*

§14.—*Die M_i im R_r, welche elliptische ebene Schnittcurven haben.*

Nachdem ich bereits im *American Journal*, vol. XXIII das Theorem von Picard über die Flächen M_2 mit rationalen ebenen Schnittcurven auf den R_r verallgemeinert habe, kann ich nun aus §§12 und 13 eine ähnliche Folgerung für die M_i mit elliptischen ebenen Schnitten ziehen.

Wie in §3 kann mit Hilfe derjenigen Schnittcurven, welche in den Tangentenräumen, also rational sind und welche überdies ihre Doppelpunkte längs einer solchen rationalen ebenen Curve, dann einer unicursalen M_2 etc. besitzen, bewiesen werden, dass die M_i abbildbar ist, sofern nicht die Tangenten-R_{r-1} ∞^1 lineare Systeme bilden, welche ∞^1-Reihe dann elliptisch sein muss.

Ist nun die M_i einmal unicursal, also abbildbar auf den R_i, dann muss das Abbildungssystem eines der in §§11, 12 kennen gelernten M_{i-1}-Systeme des R_i sein, das Bild der ebenen Schnittcurven muss einer jener typischen Complexe, sein, da eine birationale Umänderung des Abbildungssystemes gestattet ist. Diese M_{i-1}-Systeme belehren nun darüber, dass auf den M_i ein lineares System

von R_{i-3} bestehen muss, entsprechend den R_{i-3}, welche durch den Scheitel der R_{i-4}-Monoide der Abbildung gehen. Daher:

THEOREM XIV.—*Jede M_i im R_r, welche durchaus elliptische ebene Schnittcurven besitzt, erhält entweder $\infty^1 R_{i-1}$, welche eine elliptische Reihe bilden, oder $\infty^2 R_{i-2}$, oder $\infty^3 R_{i-3}$, welche je eine unicursale Reihe bilden, deren Beschaffenheit aus Theorem X. abzulesen ist.*

AD NOTAM.—In Ergänzung meiner chronologischen Feststellungen, die ich in der Fussnote zu pag. 1 gemacht habe, will ich hier angeben, welche Fortschritte meine Arbeit auch für den R_3, auf den F. Enriques sich überhaupt beschränkt, gegenüber der Enriques'schen Arbeit in Math. Ann., Bd. XLVI. leistet.

Enriques gesteht selbst ein, dass ihm die Behandlung des Problemes im R_3 mittelst einer directen Methode zu schwierig war und benützt dazu den R_4 gemäss einer von Riemann-Clifford-Veronese ausgebildeten Methode. Es sagt auf pag. 100: "Non potevo qui trarre grandi ajuti dalla teoria delle trasformazioni .... ; era dunque naturale che cercassi un ausilio nello studio projettivo delle varietà di 3 dimensioni a curve sezioni iperellittiche."

Nun *ich* erledige das Problem mittelst einer *directen* Methode, nämlich mittelst des von mir zuerst im *American Journal*, vol. XXIII ausgebildeten Transversalenprincipes. Wie ich schon daselbst erwähnt habe, ist der Character meiner Methode geradezu entgegengesetzt dem des italienischen Verfassers, insofern meine vom niederen zum höheren Raume fortschreitet, jener aber vom höheren in den niederen Raum herunter steigt.

Ein zweiter Fortschritt ist der, dass ich auch die ∞^r-Systeme, also im R_3 die ∞^3-Systeme zu erledigen im Stande bin. Ein dritter Fortschritt ist, dass ich die Typen nicht nur gegenüber der älteren Auffassung sondern auch gegenüber deren von mir zum ersten Male zur Geltung gebrachten Principe der durchgehenden Vermeidung alles Irrationalen aufstelle. Ein vierter Fortschritt, der meiner Methode inhärent ist, ist die in meiner Typentafel hervortretende ganz natürliche Eintheilung der eigentlichen Complexe in V Classen, während Enriques seine Typen im R_3 ganz pêle-mêle gibt, wie sie eben bei seiner Methode erscheinen.

Der bedeutendste (fünfte) Fortschritt aber ist der, dass Enriques überhaupt die von mir als uneigentlich bezeichneten Complexe nicht untersucht, während ich auch für sie die Typen angebe. Aber gerade die uneigentlichen Complexe sind für die Theorie der Transformationsgruppen die wichtigsten.

Auch erscheint es mir sechstens nothwendig, bei einigen Typen nicht bloss

anzugeben, dass die Basiscurven zerfallen können, sondern auch welche Zerfällungen—es sind dies sehr wenige—wieder auf neue Typen führen. Dies wird besonders dann beim Fortschreiten zum R_r wichtig.

Indem ich die Fussnote auf pag. 1. in meinem Interesse, die hier vorhergehende Aufzählung im Interesse der Sache gemacht habe, ist es nicht mein Wunsch, dem Verdienste des italienischen Verfassers, dessen leider sehr verstreute Arbeiten genauer Lectüre werth sind, um das R_3-Problem nahe zu treten. Aber eine Vergleichung meines §10 mit der Aufzählung in der Enriques'schen Abhandlung des Bandes XLVII der Math. Ann. wird zeigen, dass er ausserdem auch einige Fehler begangen hat, auch innerhalb der Beschränkung, die er sich nothwendiger Weise auferlegt. Ihm fehlen die Systeme n. 4. 5. 6 der Classe I. das System n. 4. der Classe III. Im Bande XLIX bezeichnet er dann die M_2^9, Bild aller C_3 der Ebene als einen Typus, was sie nicht ist, da das Gesammtsystem aller C_3 ein rational distinctes ∞^2-System von Transversalen gestattet. Ferner muss für die Anwendungen, wie meine Arbeit erst deutlich macht, jene "Nöthersche Doppelebene" durch die M_2^4 mit tacnode ersetzt werden, u. A.

INHALTSVERZEICHNIS.